

Universidad de Los Andes  
*Postgrado de Física Fundamental*  
*Area de Caos y Sistemas Complejos*

**Modelo de intercambio económico  
estratificado con interacciones locales**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre  
**Universidad de Los Andes**  
como requisito parcial para optar al Título de:  
**Magister Scientae en Física Fundamental**

Presentado por:  
**Lic. José L. Herrera D.**

Tutor:  
**Dr. Mario Cosenza**

Mérida, Febrero de 2007



*A mis dos mujeres favoritas de las tres que existen en el mundo,*

*Mi amor, apoyo, mi complemento...*

*Thayna*

*Mi motivo, mi princesa...*

*Darelle*

*The men of experiment are like the ant, they only collect and use; the reasoners resemble spiders, who make cobwebs out of their own substance. But the bee takes the middle course: it gathers its material from the flowers of the garden and field, but transform and digest it by a power of its own. Not unlike this is the true business of philosophy or science; for it neither relies solely on chiefly on the powers of the mind, nor does it takes the matter which it gathers from natural history and mechanical experiments and lay up in the memory whole, as it finds it, but lays it up in the understanding altered and digested. Therefore, from a closer and purer league between this two faculties, the experimental and the rational (such as has never been made), much may be hoped.*

George Bernard Shaw.

# Agradecimientos

Día a día puedo ver como Dios cumple las promesas que ha dado a sus hijos. La palabra de Dios dice: Encomienda a Jehovah tu camino; confía en El, y El hará (Salmos 37:5). He podido ver como Dios con todo su amor ha cuidado de mí y me ha llevado a poder alcanzar muchas metas y conocer mucha gente amable y buena. Ahora, esta nueva etapa de mi vida está a punto de culminar y no puedo sino primeramente darle gracias a Dios, no sólo por derramar bendiciones sobre mí, sino porque puedo admirar cada una de ellas.

A mi tutor, por segunda vez, Dr. Mario Cosenza, quien ha sido a través de todo este tiempo un instrumento de Dios, brindándome toda su ayuda y apoyo en todos los aspectos. Le agradezco al Profesor Mario toda su paciencia, entrega y motivación. Para Usted profesor, no puedo sino pedirle a Dios que lo siga llenando de bendiciones y prosperidad.

También a mis amados viejitos, de quienes espero que pronto puedan leer estas líneas y así poder compartir este momento con ellos, quienes me enseñaron todo lo que soy en esta vida, quienes lo dieron todo por mí y quienes aún estando lejos siguen teniendo esa influencia de amor sobre mí. A ustedes, Santi y Melcho, muchas gracias por lo que soy. A mis padres, gracias por su ayuda y su apoyo durante el transcurso de mi carrera.

Es maravilloso como realmente dos personas pueden llegar a ser uno. Mi amada esposa Thayna, quien desde que está conmigo es la mano cariñosa de Dios que me consuela y me entiende; la mujer con la que rio, con la que lloro, con la que he superado todos los obstáculos que se han interpuesto en mi camino. Gracias amada mía por caminar de mi mano y compartir conmigo este nuevo triunfo, porque crees

en mí y me das todo lo que una esposa puede darle a su esposo y más, gracias por ser mi complemento; gracias por amarme.

La fuerza que sigue guiando mis pasos, por quien quiero ser mejor para que cuando crezca se sienta orgullosa de mí, por ese pedacito de amor que crece día a día junto a mí, mi princesa Darelle. A ti hija mía, te doy gracias por que aprendo de ti a ser un buen padre, por que aprendo a ser un buen amigo y compañero de juegos. Gracias por haber llegado a mi vida poniéndolo todo de cabeza, poniéndolo todo mejor.

A los Profesores Antonio Parravano y Kay Tucci que son los mejores tutores y maestros, junto con el Profesor Mario, que Dios pudo haber puesto en mi camino. A ustedes Profesores, gracias por su apoyo y por su sabiduría y conocimientos.

A todos mis compañeros caóticos, pero en especial a Orlando y a Carlos, a quienes he podido conocer mejor y quienes no se cansan de brindarme su apoyo. Muchas gracias, muchachos.

A mis Profesores Nelson Pantoja y Rafael Almeida, quienes con su entusiasmo y amor por la ciencia han logrado despertar en mí el deseo de saber siempre más y más.

A todos mis hermanos y hermanas, a toda esa familia de la Iglesia de Cristo que me apoya y que con sus oraciones han hecho que yo no me desvíe del camino de Dios y que pueda alcanzar mis metas profesionales.

A todos los que están en estas líneas, a todos los que no mencioné también, muchas gracias, que Dios los bendiga.

# Resumen

Se investiga un modelo de agentes económicos interactuantes en una sociedad estratificada al introducir la noción de espacio. Los agentes se encuentran ubicados en una red donde las interacciones sólo se llevan a cabo entre vecinos más cercanos y si pertenecen a la misma clase económica, definida a través de un parámetro que mide la diferencia en riqueza que dos agentes pueden tener para poder interactuar. Se exploran redes unidimensionales y bidimensionales con un tamaño de vecindad variable. Para caracterizar el comportamiento colectivo y las transiciones de fase en el sistema se introducen parámetros de orden novedosos, como son el coeficiente de Gini y la actividad del sistema. Se observa una transición de los patrones espaciotemporales del sistema, entre un estado laminar y un estado turbulento, en un punto crítico de los parámetros. Estos patrones son caracterizados por la actividad del sistema, una cantidad que mide los cambios promedio en el espacio y en el tiempo de la riqueza de los agentes. También usamos el coeficiente de Gini, una cantidad que describe el grado de desigualdad en la distribución de riqueza del sistema, como un parámetro de orden para caracterizar los comportamientos colectivos en diferentes regiones de parámetros. Se encuentra que la topología produce desviaciones de la ley de Pareto, frecuentemente encontrada en distribuciones de riqueza para los rangos de riqueza alta. Se demuestra que el efecto de la desaparición de la clase media está determinado por la probabilidad de favorecer a los agentes de menor riqueza, así como por el rango de interacción incluido en nuestro modelo.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada.</b>	<b>10</b>
1.1. El modelo. . . . .	11
1.2. Resultados del modelo. . . . .	13
<b>2. Modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada con interacciones locales.</b>	<b>17</b>
2.1. Modelo de intercambio económico sobre redes. . . . .	18
2.2. Parámetros de orden. . . . .	19
2.3. Intercambio económico en una dimensión. . . . .	23
2.4. Intercambio económico en dos dimensiones. . . . .	28
<b>3. ¿Por qué desaparece la clase media?. Aumentando la vecindad.</b>	<b>34</b>
3.1. Aumentando la vecindad. . . . .	35
<b>Conclusiones</b>	<b>44</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>



*Economics and physics are two disciplines that, contrary to widespread perceptions, have significant common agendas.*

Editorial de *Nature* **441**, 667, Junio 2006.

# Introducción

## ¿ Qué es Econofísica?

Todo lo que estudiamos en Física puede ser reducido a relaciones matemáticas que nos ayudan a describir el complicado mundo que nos rodea. Para escalas muy grandes, donde fenómenos como la velocidad de la luz y la gravedad son importantes, tenemos la relatividad general. En el dominio de lo muy pequeño, la mecánica cuántica y las teorías de campo nos han dado un entendimiento satisfactorio. En el medio, donde ni los fenómenos a escala atómica ni la velocidad de la luz son importantes, tenemos la mecánica newtoniana. A través de todas estas escalas aparecen no linealidades, caos y procesos de auto-organización colectiva. Tenemos teorías para entender casi todo, al menos en forma cualitativa, excepto por los fenómenos que involucran nuestras propias decisiones como entes pensantes. Recientemente, nuestro éxito al descubrir que la naturaleza se comporta de manera matemática nos ha llevado a lo que un famoso economista ha descrito como “el complejo de Tarzan”, lo cual significa que los físicos son lo suficientemente atrevidos para irrumpir en campos que se encuentran más allá de las ciencias naturales, más allá de la región segura de las leyes matemáticas [1]. ¿De dónde viene nuestro creciente interés actual en fenómenos sociales o en la economía y las finanzas que viene ocupando muchas páginas en diversas revistas especializadas en temas tradicionales de Física?.

Según Joseph McCauley [3], este proceso comenzó con la explosión de interés en la Dinámica No Lineal y el Caos en la década de los 80's. De nuestra experiencia del Caos, sabemos que nuestras aparentemente simples ecuaciones de movimiento pueden generar soluciones impredecibles y comportamientos complejos. Observamos fascinados cómo elementos no lineales interactivos eran capaces de generar comportamientos colectivos no triviales y organizados, y palabras como “emergencia” y “sistemas complejos” se volvieron cotidianas en Physical Review. A medida que el progreso de la computación fue puesto al alcance de cualquier físico, fuimos modelando sistemas cada vez mas diversos. La computadora personal se convirtió en un instrumento de exploración científica, como lo fue el primer telescopio para Galileo. Nuestra curiosidad por el mundo que nos rodea no ha cambiado; tan sólo el foco de atención: ahora somos capaces de aplicar el método de Galileo a nuestros propios comportamientos sociales.

En el contexto del estudio actual de sistemas complejos, la aplicación de los conceptos y herramientas de la Física a sistemas económicos se ha denominado Econofísica.

En los últimos diez años se ha observado el surgimiento de una comunidad de físicos activamente involucrados en este nuevo campo de la Econofísica. Han aparecido nuevas revistas, así como nuevas secciones dedicadas a este tema en las revistas tradicionales, y muchas conferencias actualmente se dedican a estos tópicos. Se han publicado al menos diez libros relacionados con Econofísica en años recientes. La Universidad de Fribourg, en Suiza, mantiene una página web con una extensa bibliografía de artículos en Econofísica, <http://www.unifr.ch/econophysics>. Tesis doctorales en Econofísica se están realizando en departamentos de Física alrededor del mundo, y en Europa varios departamentos de Física tienen grupos de investigación en esta área. La empresa de consultora internacional McKinsey and Co. patrocina un nuevo premio anual de investigación en Econofísica y Sociofísica, denominado The Young Scientist Award.

Para tener una mejor perspectiva del interés y la evolución de la Econofísica, hagamos una breve reseña histórica de los antecedentes e intentos de las ciencias básicas de abordar temas de interés económico y social.

Aunque el hecho de que los economistas tomen prestado algunos conceptos de la Física podría parecer poco probable, ésta ha sido una característica de la teoría económica desde su concepción. Adam Smith escribió su obra *Wealth of Nations*, con lo que puso el fundamento del pensamiento económico en 1776, en un clima intelectual que estaba impregnado por las ideas newtonianas. De hecho, alguno de sus contemporáneos compararon la circulación del comercio con el movimiento planetario. Augusto Comte, Pierre-Simon Laplace y el astrónomo belga Adolphe Quetelet ayudaron a establecer la idea de que existen leyes naturales, en afinidad con las leyes de movimiento de Newton, que gobiernan a los sistemas sociales. Algunos filósofos economistas del siglo XIX tales como Stuart Mill y Karl Marx, usaban con bastante frecuencia ideas y analogías físicas. La teoría microeconómica, que trata de entender el fenómeno económico a partir de la interacción de agentes individuales en la economía, fué establecida a finales del siglo XIX, justamente cuando James Clerk Maxwell y Ludwing Boltzmann establecían los fundamentos de la Física Estadística. El microeconomista Francis Edgeworth y Alfred Marshall fueron atraídos por algunas de las ideas de estos físicos, en particular la noción de que la economía alcanza un estado de equilibrio como aquel descrito para los gases por Maxwell y Boltzmann. La microeconomía de Edgeworth y Marshall condujo a la teoría económica neoclásica, que define la corriente actual.

Como lo describen H.E Stanley y R. Mantegna ([2]), durante los últimos 30 años, los físicos han logrado resultados importantes en el campo de transiciones de fase, mecánica estadística, dinámica no lineal y sistemas desordenados. En estos campos, se encuentran presentes las leyes de potencia, escala y series de tiempo impredecibles (estocásticas o deterministas) y la interpretación física de estos procesos se obtiene, con bastante frecuencia, usando estos conceptos. Por eso, puede sorprender el hecho de saber que el primer uso de una distribución de ley de potencia se realizó en el área de las ciencias sociales. Hace aproximadamente 100 años, el economista Vilfredo Pareto investigó las propiedades estadísticas de la riqueza de los individuos en una economía estable, obteniendo la distribución

$$y \sim x^{-\nu}, \tag{1}$$

donde  $y$  es el número de personas que tienen un ingreso mayor o igual a  $x$  y  $\nu$  es un exponente que Pareto estimó alrededor del valor 1,5. Pareto notó que este resultado era bastante general y que podía ser aplicado a naciones tan diferentes como Inglaterra, Irlanda, Alemania, Italia y hasta en Perú.

El concepto de una distribución de ley de potencia es contraintuitivo, ya que implica que el sistema carece de una escala característica. Esta propiedad hizo que no se usaran distribuciones de ley de potencia en las ciencias naturales hasta la reciente emergencia de nuevos paradigmas, (i) en teoría de probabilidad, gracias al trabajo de Paul Lévy (*calcul des Probabilites*) y gracias al uso de distribuciones de ley de potencia en muchos problemas que abordó Mandelbrot (*Fractal geometry of nature*); y (ii) en el estudio de transiciones de fase, que introdujeron los conceptos de escala para funciones termodinámicas y funciones de correlación.

Otro concepto que es ubicuo en las ciencias naturales es el de *random walk*. La primera descripción teórica de un *random walk* fué desarrollado en 1905 por Einstein en su famoso artículo sobre el movimiento browniano. En años subsiguientes, la matemática del *random walk* fué desarrollada de manera más rigurosa por Wiener. La primera formalización del modelo *random walk* se encuentra la tesis doctoral de Louis Bachelier. Bachelier, matemático francés, presentó su tesis en la Academia de París en 1900, para obtener el grado de *Docteur en Sciences Mathématiques*. Su tutor fué Henry Poincaré, uno de los más grandes matemáticos del momento. La tesis, titulada *Théorie de la spéculation*, es sorprendente en muchos aspectos. Tiene que ver con la valoración de opciones en mercados especulativos; una actividad que hoy es extremadamente importante en los mercados financieros. Para completar esta tarea, Bachelier determinó la probabilidad de los cambios de precio al escribir lo que hoy se conoce como la ecuación de Chapman-Kolmogorov, y reconoció que lo que ahora es llamado un proceso de Wiener satisface la ecuación de difusión. Este aspecto fué redescubierto por Einstein en su artículo de 1905 acerca del movimiento browniano. Retrospectivamente, la tesis de Bachelier carece de rigor matemático en algunos de sus puntos aplicados a la economía. Específicamente, el uso de una distribución Gaussiana para los cambios de precio no fué suficientemente motivada desde el punto de vista matemático. Sin embargo, estas limitaciones no menoscaban

el valor del trabajo pionero de Bachelier. Para poner el trabajo de Bachelier en perspectiva, el modelo de Black & Scholes de valoración de opciones - considerado la base principal de esta teoría - fué publicado en 1973, casi tres cuartos de siglo luego de la publicación de la tesis de Bachelier.

El problema de la distribución de los cambios de precio ha sido considerado por muchos autores desde la década de 1950, que fué el período cuando los matemáticos empezaron a mostrar interés en el modelado de los precios en el mercado de valores. La propuesta original de Bachelier de cambios de precio distribuidos en forma Gaussiana fué rápidamente reemplazada por un modelo en el cual los precios tenían una distribución log-normal, es decir, donde los precios están desarrollando un movimiento geométrico browniano. En este tipo de movimiento, las diferencias de los logaritmos de los precios están distribuidos en forma Gaussiana. Se sabe que este modelo provee sólo una primera aproximación de lo que se observa en datos reales. Por esta razón, se han propuesto un número de modelos alternativos buscando explicar la evidencia empírica de que las colas de las distribuciones son más amplias que lo esperado para un movimiento geométrico browniano; y las fluctuaciones en el tiempo del segundo momento de los cambios de precio.

Entre los modelos alternativos propuestos, el desarrollo más revolucionario en la teoría de precios especulativos desde el trabajo inicial de Bachelier, es la hipótesis de Mandelbrot de que los cambios en el precio siguen una distribución estable de Lévy. Procesos en los cuales la distribución de Lévy es estable son procesos estocásticos que obedecen un teorema del límite central generalizado.

Una creencia ampliamente aceptada en teoría financiera es que las series de tiempo de los precios de bienes son impredecibles. Esta creencia es la piedra angular de la descripción de la dinámica de precios como procesos estocásticos. Desde la década de 1980, ha sido reconocido en las ciencias físicas que las series de tiempo impredecibles y los procesos estocásticos no son sinónimos. Específicamente, la teoría del caos ha mostrado que series de tiempo impredecibles emergen de sistemas no lineales deterministas. Los resultados obtenidos en el estudio de sistemas físicos y biológicos impulsaron el interés en sistemas económicos, y los físicos han investigado si la evolución temporal de los precios de las acciones en los mercados financieros

podrían deberse a una dinámica determinista no lineal de un número (limitado) de variables.

Recientemente, un número creciente de físicos ha intentado analizar y modelar mercados financieros y, de manera más general, sistemas económicos. El interés de esta comunidad en sistemas financieros y económicos tiene raíces que datan de 1936, cuando Ettore Majorana escribió su artículo pionero en la analogía esencial entre leyes estadísticas de la Física y las ciencias sociales. Este punto de vista ortodoxo fué considerado de interés marginal hasta hace poco.

Los mercados financieros exhiben muchas de las propiedades que caracterizan a los sistemas complejos. Son sistemas fuera del equilibrio en los que muchas subunidades interactúan de forma no lineal en la presencia de retroalimentación. En los mercados financieros, las reglas que gobiernan los procesos son estables y la evolución temporal del sistema es monitoreada continuamente. Ahora es posible desarrollar modelos y probar su poder de predicción y su exactitud usando datos disponibles.

A pesar de que el pensamiento científico fué la base para plantear soluciones a los problemas sociales, antes de la década de 1990, muy pocos físicos realizaban alguna investigación asociada con sistemas sociales y económicos. Las excepciones incluían a Kadanoff, Montrol, y un grupo de físicos en el Instituto Santa Fe.

Desde 1990, la actividad de los físicos en este campo se ha hecho menos esporádica y se puede considerar complementaria a los tratamientos más tradicionales de la matemática financiera. Una diferencia característica es el énfasis que le dan los físicos al análisis empírico de datos económicos. Otro es la base teórica y los métodos de la física estadística desarrollada en los últimos años. Los conceptos de escala, universalidad, sistemas desordenados, y sistemas autorganizados han demostrado ser de mucha ayuda en el análisis y modelado de sistemas financieros y económicos. Un argumento que surge algunas veces es que el análisis empírico que se lleva a cabo en datos financieros y económicos no es equivalente a la investigación experimental usual que se realiza en las ciencias físicas. En otras palabras, es imposible realizar experimentos a gran escala en economía y finanzas que puedan falsear las predicciones econofísicas.

Notamos que esta limitación no es específica de sistemas económicos y financieros, sino que también afecta áreas bien establecidas de la física como la astronomía, física atmosférica y geofísica. Por lo tanto, en analogía con la actividad en estas áreas más sólidas, encontramos que es posible probar o refutar cualquier teoría asociada con los conjuntos de datos financieros y económicos disponibles actualmente.

Hay dos áreas de la investigación en física que tienen que ver con sistemas financieros y económicos. La primera consiste en la caracterización estadística del proceso estocástico de los cambios de precios de las acciones. Se han realizado muchos estudios que se concentran en diferentes aspectos del proceso de análisis estocástico, por ejemplo, la forma de la distribución de los cambios de precios, la memoria temporal, y las propiedades estadísticas de orden superior. Esta es un área activa, y se están realizando intentos para desarrollar el modelo estocástico más satisfactorio que describa todas las características que se encuentran en datos empíricos.

Una segunda área concierne al desarrollo de un modelo teórico que sea capaz de mostrar todas las características de los mercados financieros reales. Se han propuesto muchos modelos, y algunas de las propiedades principales de la dinámica estocástica de los precios son reproducidos por éstos.

Así, algunos científicos que trabajan en el área de la Econofísica, al igual que la Física tradicional, la dividen en dos ramas, Econofísica experimental y Econofísica teórica. La primera trata de analizar datos de mercados reales y encontrar la dinámica subyacente que gobierna su comportamiento. La Econofísica teórica, por otro lado, busca modelos microscópicos que den cuenta del comportamiento macroscópico de los sistemas económicos.

## **El problema de esta tesis: Un modelo de intercambio económico.**

La presente tesis está enmarcada dentro del área de la Econofísica teórica, específicamente se trata de desarrollar un modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada, donde los elementos están ubicados en una red y poseen interacciones con sus vecinos.

Varios modelos de intercambio económico se han propuesto en los últimos años.

Pianegonda *et al.* [4, 5], en una serie de artículos introdujeron modelos de redistribución de riqueza sobre una red unidimensional. Das y Yarlaga [6] analizaron matemáticamente un modelo simple de mercado donde las interacciones se llevaban a cabo solamente entre dos agentes conservando la suma de su riqueza y con la condición de que ninguno podía tener riqueza negativa luego de cada iteración. Chakraborti [7] estudió la distribución de dinero para diferentes tipos de transacciones monetarias. Entre estos, consideró un modelo en el cual los agentes invierten una cantidad constante de dinero en cada transacción. Chartterjee *et al.* (CCM) [8] consideraron la aparición de leyes de Pareto en un modelo cinético de mercado con propensión al ahorro en forma aleatoria. Slanina [9] estudió un modelo con una regla de interacción ligeramente diferente al de Chartterjee, y también propuso la posibilidad de añadir y de perder dinero en cada iteración.

Recientemente, Manolova *et al* [11, 12] estudiaron un modelo de economía que consiste en un número finito de agentes localizados sobre una red unidimensional con condiciones periódicas. Cada agente compra un conjunto de bienes de su vecino más cercano (izquierda), produce algún otro bien, vende bienes a su vecino más cercano (derecha), y consume el resto.

Un modelo más reciente de intercambio de riquezas entre agentes en un sistema económico fué propuesto por Laguna *et al.* [15]. Este modelo introduce el concepto de estratos económicos; la interacción sólo tiene lugar entre agentes pertenecientes a un mismo estrato económico. Los resultados muestran una serie de efectos interesantes, entre los cuales destaca el fenómeno de la desaparición de la clase media (elementos con valores de riqueza intermedia) para ciertos valores de parámetros. En el modelo de Laguna *et al.* no existe una topología definida para la interacción entre los elementos. Esta interacción se realiza en forma aleatoria entre los elementos, es decir, todos los agentes económicos pueden intercambiar riqueza con todos los demás agentes. Esto representa lo que se conoce como una red de acoplamiento global.

En la presente tesis nos proponemos desarrollar un modelo de intercambio económico entre agentes, que incorpora el concepto de estratificación de Laguna *et al.* y el



concepto de localización espacial, es decir, los agentes económicos serán ubicados sobre los vértices de redes unidimensionales y bidimensionales. El objetivo es estudiar los efectos de ambos ingredientes, la estratificación y la distribución espacial, en los fenómenos colectivos que emergen en el sistema, considerado aquí como un sistema dinámico espaciotemporal cuyas reglas de iteración provienen de la dinámica económica.

En el Capítulo 1 de esta tesis se presenta de manera detallada el modelo propuesto por Laguna *et al.*

En el Capítulo 2 presentamos nuestra generalización del modelo de Laguna *et al.*, que incluye la ubicación espacial de los elementos en redes de una y dos dimensiones.

Utilizamos como parámetro de orden para caracterizar las transiciones entre los distintos estados colectivos o fases del sistema un índice introducido por el estadista italiano Corrado Gini, llamado índice de Gini. Este índice mide el grado de desigualdad en la distribución de riqueza en un sistema y su empleo como parámetro de orden, en analogía con las transiciones de fase, es novedosa. Igualmente, caracterizamos los patrones espaciotemporales que surgen para distintos valores de parámetros del sistema, utilizando los conceptos de *laminaridad* y de *turbulencia*, al igual de lo que se ha hecho en el contexto de sistemas dinámicos. Hasta donde tenemos conocimiento, la aplicación de estos conceptos en el área de modelos económicos resulta novedosa.

En el Capítulo 3 se investiga el comportamiento colectivo del sistema al aumentar la vecindad de interacción de cada elemento, para explorar el límite del acoplamiento global y obtener el modelo de Laguna *et al.* como un caso especial de nuestro modelo general.

Por último, presentamos una discusión del resultado del presente trabajo en las Conclusiones.

*The first time it is an accident, the second time  
a coincidence, the third time it is enemy action*

James Bond.

# Capítulo 1

## Modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada.

Recientemente, se han propuesto muchos modelos de intercambio de capital entre agentes económicos para explicar la emergencia de distribuciones de riqueza del tipo de ley de potencia obtenidas por Pareto hace más de un siglo. Pareto, en su trabajo original analizó las distribuciones de ingreso de trabajadores y compañías en diferentes países, y descubrió que en todos los países y para diferentes tiempos estas distribuciones seguían un comportamiento de ley de potencia, donde la probabilidad acumulada de ingreso  $P(w)$  de las personas cuyo ingreso es por lo menos  $w$  está dada por  $P(w) \propto w^{-\alpha}$ , con  $1,2 \leq \alpha \leq 1,9$ . Datos internacionales empíricos sugieren que la distribución de Pareto provee un buen ajuste de las distribuciones de ingresos de diferentes países en el rango de ingresos altos. Sin embargo, esta distribución no encaja con los datos observados para los rangos de ingresos medio y bajo, para los cuales se han propuesto diferentes distribuciones.

La mayoría de los modelos de intercambio consideran una probabilidad asimétrica de interacción, de manera que el agente más pobre sea privilegiado en cada intercambio. Introducir la probabilidad de favorecer al agente más pobre en un intercambio

es una forma simple de simular la acción del estado o de algún tipo de política regulatoria que trata de redistribuir los recursos. Además, casi todos estos modelos consideran el intercambio entre agentes escogidos en forma aleatoria o siguiendo una dinámica externa. La distribución obtenida es del tipo Gibbs-exponencial en la mayoría de los casos, estando estos resultados en acuerdo con distribuciones reales en ciertos rangos de ingreso. Otros autores han propuesto modelos en los que los agentes tienen una aversión al riesgo. El efecto de este factor sobre la distribución de riqueza también da como resultado una distribución del tipo Gibbs-exponencial en la mayoría de los casos y muestra un comportamiento de ley de potencia en algunos límites.

Todos estos modelos tienen un punto en común: no se considera la correlación entre la riqueza de los agentes y la probabilidad de interacción entre ellos. Sin embargo, el hecho de que la gente tiende a interactuar principalmente con otros de su misma clase social y económica, puede ser un factor determinante en la distribución de riqueza de una población. Este efecto fué introducido en el trabajo de Laguna *et al.* [15], que describiremos en el presente Capítulo.

La estratificación económica se establece mediante un parámetro que determina la máxima diferencia en riqueza que dos agentes pueden tener para poder interactuar. Este tipo de interacción ha sido usada previamente para estudiar la formación de opinión pública como resultado de interacciones sociales [14].

## 1.1. El modelo.

Se considera una población de  $N$  agentes caracterizados por una riqueza  $w_i$  y un factor de aversión al riesgo  $\beta_i$ ,  $i = 1 \dots, N$ . Se escoje como condición inicial para ambas cantidades distribuciones aleatorias uniformes  $w_i \in [0, 1]$ , y  $\beta_i \in [0, 1]$ . Para cada agente  $i$ , el número  $[1 - \beta_i]$  mide el porcentaje de riqueza que está dispuesto a arriesgar en una transacción. Se considera este porcentaje como un parámetro fijo para cada individuo durante toda la evolución del sistema. Pero mientras el valor de  $\beta_i$  permanece fijo, el valor de  $w_i = w_i(t)$  puede cambiar en el tiempo como consecuencia de las interacciones. En cada instante de tiempo  $t$  se seleccionan dos agentes

que intercambiaran recursos de la siguiente manera: se escoge de forma aleatoria un agente  $i$  y, también en forma aleatoria, un segundo agente  $j$  que pertenece a la misma clase económica que el elemento  $i$ . Esto significa que el agente  $j$  es escogido en forma aleatoria del subconjunto del sistema para el cual  $|w_i(t) - w_j(t)| < u$ . El parámetro  $u$  mide el “ancho” de la clase económica, y determina el número de agentes que pueden interactuar con el agente  $i$  en el instante  $t$ . También se establece que ningún agente puede ganar mas de la cantidad que se propone invertir. Entonces, la cantidad a ser intercambiada es el mínimo valor de los recursos disponibles para ambos agentes, es decir,

$$dw = \min[(1 - \beta_i)w_i, (1 - \beta_j)w_j]. \quad (1.1)$$

Finalmente, se considera una probabilidad  $p \geq 0,5$  de favorecer al más pobre de los dos agentes interactivos, definida como

$$p = \frac{1}{2} + f \times \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)}, \quad (1.2)$$

donde  $f$  es un factor que va desde 0 (igual probabilidad de favorecer a ambos agentes) a 1/2 (la más alta probabilidad de favorecer al agente más pobre). Así, en cada interacción, el agente más pobre tiene una probabilidad  $p$  de ganar la cantidad  $dw$ , mientras que el agente más rico tiene probabilidad  $(1 - p)$  de obtener esa cantidad.

Esta dinámica de interacción se puede resumir mediante el siguiente algoritmo iterativo:

- 1) Se escoge aleatoriamente un elemento  $i$ .
- 2) Se escoge aleatoriamente un elemento  $j$ .
- 3) Verificar si se encuentran en el mismo nivel económico (parámetro  $u$ ). Repetir paso 2 hasta que se cumpla paso 3.
- 4) Calcular la cantidad  $dw$  a intercambiar.
- 5) Asignar la cantidad  $dw$  al elemento más pobre entre  $i$  y  $j$  con probabilidad  $p$  y al elemento más rico con probabilidad  $(1 - p)$ .

Al llevar a cabo la simulación con estas reglas, luego de un transiente el sistema llega a un estado asintótico donde la riqueza ha sido redistribuida como consecuencia de las interacciones. Las simulaciones numéricas se realizaron para sistemas de tamaño  $N = 10^5$  agentes, y para diversos valores de los parámetros  $f$  y  $u$ . El análisis de los resultados en el estado estacionario se realizó luego de  $t = 10^5 N$ , donde  $t$  es el número de iteraciones.

## 1.2. Resultados del modelo.

Como ya se dijo, cuando  $t = 0$ , a cada agente se le asigna aleatoriamente una riqueza  $w_i$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Al transcurrir la dinámica, los intercambios entre los agentes generan una redistribución de riqueza que, aunque depende de los valores de  $f$  y  $u$ , presenta algunas características comunes. La primera es que en todos los casos el número de agentes con riqueza muy pequeña aumenta. Ya que el modelo es conservativo, esto significa que los recursos de los agentes pobres contribuyeron a incrementar la riqueza de pocos agentes. Para valores pequeños de  $f$ , aparece un pico bastante pronunciado para riqueza igual a cero. Esto significa que una fracción significativa de la población ha perdido todos sus recursos. El proceso de intercambio es diferente para valores grandes de  $f$  y  $u$ : se observa un máximo para valores intermedios de riqueza y para tiempos largos, la distribución parece ser más equitativa.

La distribución de riqueza del sistema se calcula como un promedio de varias realizaciones de condiciones iniciales para los mismos valores de parámetros considerados. La figura 1.1 muestra la distribución  $P(w)$  para un sistema de  $N = 10^5$  agentes y 100 realizaciones para cada conjunto de parámetros mostrados.

Para valores pequeños de  $u$  (Fig 1.1 (a), (b), (c)) se observa un máximo para  $w = 0$ , así como una distribución bastante plana para valores intermedios de riqueza. Esto significa que hay una fuerte e irreversible transferencia de riqueza de la clase baja a la clase alta. El máximo para riqueza cero se encuentra presente para valores de  $u$  pequeños cuando la probabilidad de favorecer al más pobre es baja ( $f = 0,1$  en la figura 1.1a). Sólo para valores altos de  $u$  la distribución es más uniforme con un máximo para valores intermedios de  $w$ . Para  $f = 0,1$  y  $f = 0,3$ , el máximo desaparece

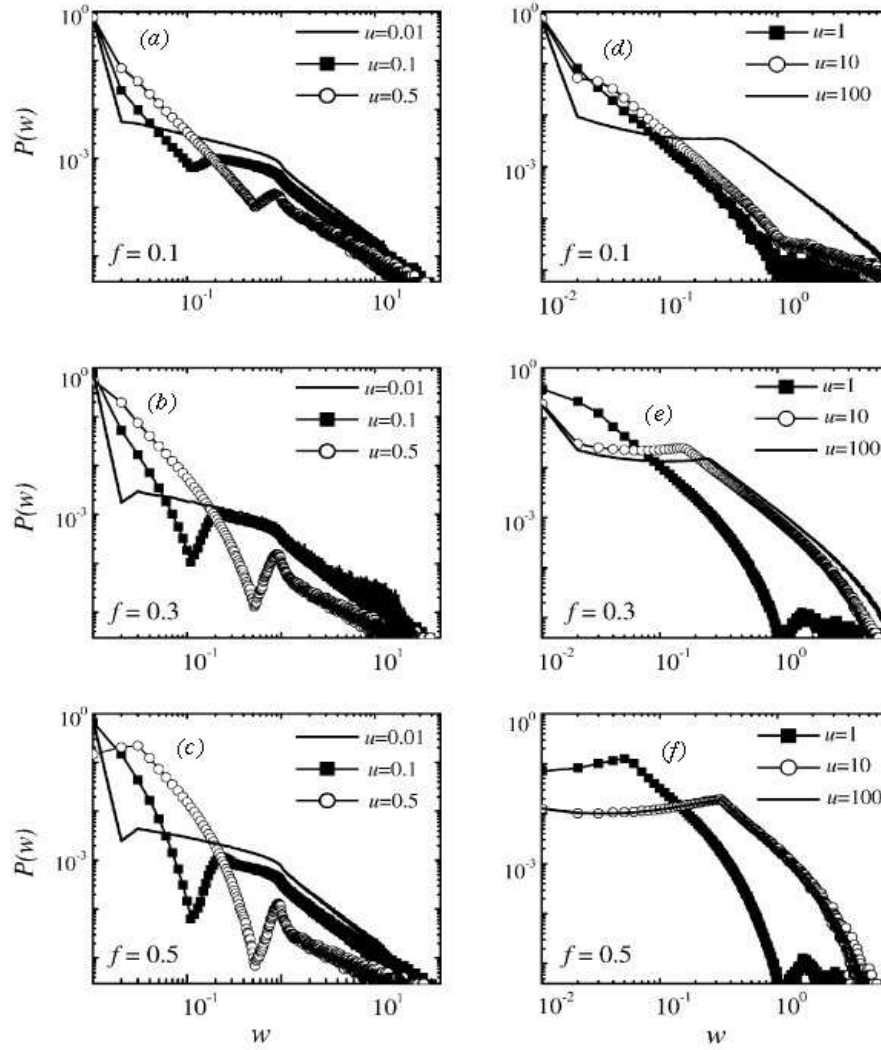


Figura 1.1: *Estados estacionarios para  $N = 10^5$  y varios valores de  $f$  y  $u$ .*

para  $u \geq 100$ , mientras que para  $f = 0,5$  esta desaparición ocurre para  $u \sim 1$ . Pero aun más interesante, para todos los valores de  $f$  considerados se encuentra un rango intermedio de  $u$  en la que se obtiene la formación de dos clases económicas. Una clase corresponde a los agentes con muy poca riqueza, mientras que la otra está formada por agentes con mucha riqueza. Estas dos clases están separadas por una brecha que no permite futuros intercambios de riqueza entre las clases alta y baja. Esto tiene como consecuencia la desaparición de la clase media. Este es el resultado más relevante. El mínimo de la brecha se observa para  $w \sim u$ , sugiriendo que el rango de interacción permitido aparece como una escala para el sistema.

Esta separación de los agentes del sistema en dos clases recuerda la polarización en modelos de formación de opinion que ha sido observada, por ejemplo, por Zanette *et al.* [14], a pesar de que las reglas para intercambiar opiniones son diferentes a las presentes interacciones para intercambio de riqueza. Para valores de  $u$  lo suficientemente grandes no se observa la brecha, ya que muy pocos agentes pueden retener mucha de riqueza.

La brecha entre las clases también se observa en los gráficos de correlación entre riqueza y la aversión al riesgo como se muestra en la Figura 1.2

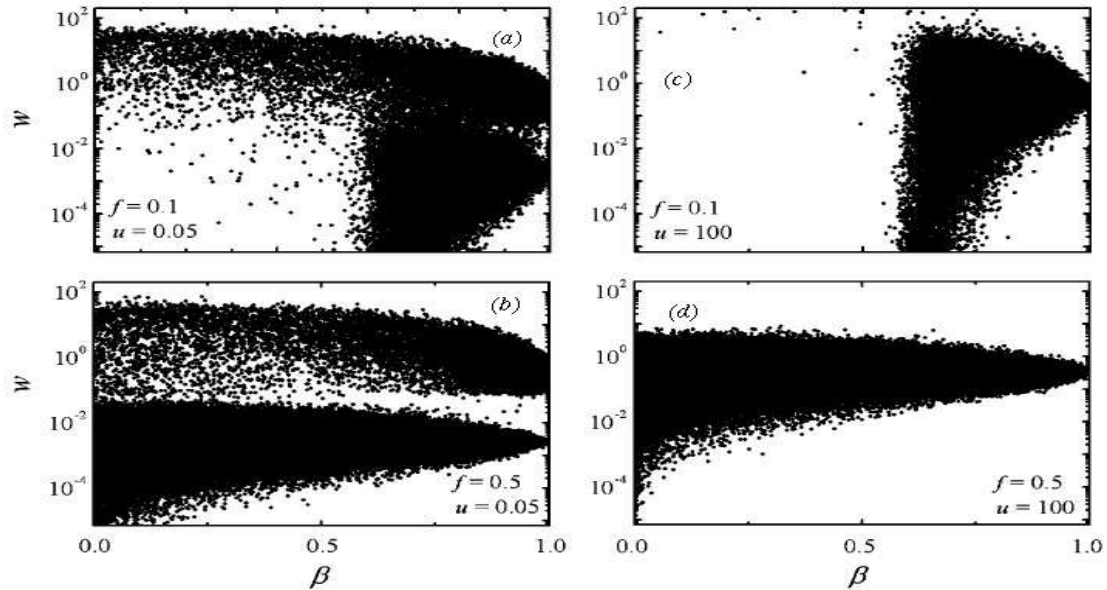


Figura 1.2: Gráfica semilogarítmica de la riqueza  $w$  vs. la aversión al riesgo  $\beta$ .

Para valores de  $f$  pequeños ( $f = 0,1$ , Figura 1.2a y c), los agentes más pobres tienen riqueza prácticamente cero y, por lo tanto, no aparecen en la Figura 1.2. Para  $u = 0,05$ , (Figura 1.2a) aparece una brecha para todo el rango de  $\beta$ , siendo mucho más amplio en la región  $\beta < 0,5$ . Esto significa que los agentes con una aversión al riesgo baja sólo pueden ser o muy ricos o muy pobres en el estado estacionario (los más pobres no aparecen en el gráfico). Para valores de  $u = 100$ , (Figura 1.2c) se encuentra una distribución en la que los agentes con valores altos de  $\beta$  se encuentran en la clase media, como se espera que suceda con agentes que no arriesgan mucho su riqueza, mientras que los más ricos y los más pobres son aquellos que tienen un

parametro de factor de aversión al riesgo  $\beta$  muy pequeño.

La situación cambia si la probabilidad de favorecer al más pobre es alta ( $f = 0,5$ , Figura 1.2b y d). Para  $u = 0,05$ , (Figura 1.2b la brecha entre las clases baja y alta se encuentra presente para todo el rango de  $\beta$ , ya que los agentes más pobres tienen poca riqueza pero diferente de cero en el estado estacionario. Los agentes que poseen un  $\beta$  bajo pueden ser los más ricos o los más pobres del sistema. Para un mayor valor del umbral ( $u = 100$ , Figura 1.2d) la brecha desaparece. Los agentes más pobres y los más ricos son aquellos con un valor de parámetro de aversión al riesgo  $\beta$  pequeño.

Un hecho importante es que las interacciones entre agentes económicos reales forman efectivamente una red de conectividad. Esto significa que en muchas situaciones cada agente de un sistema económico está limitado para realizar intercambios con otros agentes que pertenecen a su entorno. De esta forma, un modelo de intercambio económico sujeto a interacciones locales puede verse como un sistema dinámico espaciotemporal. Este tipo de modelo es objeto de estudio del siguiente capítulo.



*The stellar universe is not so difficult of  
comprehension as the real actions of other people.*

Groucho Marx

## Capítulo 2

# Modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada con interacciones locales.

La economía es el estudio de aquellas actividades que involucran transacciones de intercambio (dinero o bienes) entre agentes. Tal como cualquier otra actividad humana, la economía ocurre en redes de conectividad que pueden ser de tipo pequeño mundo, libres de escala, regulares, etc.; ya que las conexiones sociales influyen en todas las actividades económicas que se realizan en cualquier población. Así, se representa la economía de una sociedad como una red de negocios, financiamientos y productos.

En el lenguaje matemático, una red es representada por un grafo. Un grafo es un par de conjuntos  $G = (P, E)$ , donde  $P$  es un conjunto de nodos (o vértices) y  $E$  es un conjunto de conexiones (o enlaces) que conectan dos elementos de  $P$ . Usamos el término red económica para un grafo donde los nodos representan a los agentes económicos de una sociedad (industrias, tiendas, consumidores, bancos, etc) y los enlaces son cualquier transacción que se lleva a cabo entre dos agentes (comprando

productos a una tienda, pidiendo un préstamo a un banco, exportando trigo a otro país, etc.)[18].

En este Capítulo proponemos un modelo de intercambio de riqueza entre agentes definidos como nodos en redes regulares de una y de dos dimensiones, y basado en las reglas de interacción de Laguna *et al.* [15], explicadas en el capítulo anterior.

Consideraremos una red con  $N$  agentes o nodos. En una red euclidiana  $d$  dimensional,  $N = L^d$  donde  $L$  es el lado de la red. El agente  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) tiene una riqueza  $w_i(t)$  en un instante  $t$  y una aversión al riesgo  $\beta_i$  constante. Adicionalmente, el agente  $i$  está conectado con un conjunto de agentes vecinos  $\eta(i)$  que depende de la topología específica de la red. Definimos como  $k(i)$  al número de elementos contenidos en el conjunto  $\eta(i)$ , o la cardinalidad de este conjunto. En redes regulares  $k(i) = k$ , constante para todos los elementos de la red.

Asumimos, al igual que el modelo de Laguna *et al.* [15] que la riqueza total en el sistema se conserva, i.e.,  $\sum_{i=1}^N w_i(t) = \text{constante}$ .

## 2.1. Modelo de intercambio económico sobre redes.

Una vez definida la red, la dinámica de interacción entre los elementos se describe por el siguiente algoritmo:

- 1) Se escoge aleatoriamente un elemento  $i$  en el tiempo  $t$ .
- 2) Se escoge aleatoriamente un elemento  $j \in \eta(i)$ .
- 3) Verificar  $|w_i(t) - w_j(t)| < u$ . Repetir pasos 1 y 2 hasta que se cumpla paso 3 .
- 4) Calcular la cantidad  $dw(t)$  a intercambiar,

$$dw(t) = \min[(1 - \beta_i)w_i, (1 - \beta_j)w_j]. \quad (2.1)$$

- 5) Con probabilidad  $p$ , asignar la cantidad  $dw(t)$  al elemento que posee menor riqueza entre  $i$  y  $j$ , y con probabilidad  $(1 - p)$  asignar esa cantidad al elemento que posee mayor riqueza entre  $i$  y  $j$ .

El paso 2 del algoritmo anterior contiene la extensión del modelo presentado en el Capítulo 1. Nuestro modelo introduce una restricción adicional a las posibilidades de interacción entre los elementos que conforman el sistema:

- i) Sólo existe interacción entre elementos vecinos, es decir, elementos que se encuentren conectados en forma directa.
- ii) La interacción entre vecinos sólo se lleva a cabo si estos se encuentran en el mismo “estrato económico” (parámetro  $u$ ).

Cuando ambas condiciones se cumplen, existe interacción, es decir, la condición 3 del algoritmo se satisface.

Como se vio en el Capítulo 1, la introducción del parámetro  $u$  se sustenta en la observación empírica de que las personas tienden a interactuar principalmente con aquellos de su mismo nivel social o económico. Ahora, también es un hecho empírico que las transacciones y negociaciones entre agentes se realizan, por lo general, tendiendo a reducir la “distancia” entre los agentes involucrados. Es decir, los intercambios tienden a ocurrir entre elementos vecinos o que tengan alguna conexión y no entre dos elementos escogidos al azar. Esto se realiza buscando minimizar los costos de traslado y transporte al momento de una transacción entre dos agentes.

## 2.2. Parámetros de orden.

En esta sección definiremos varias cantidades que emplearemos como parámetros de orden novedosos para caracterizar las transiciones entre los diferentes estados colectivos del sistema.

El coeficiente de Gini es una medida de la desigualdad en una distribución, y se define como la razón entre el área de la curva de Lorenz de la distribución y el área bajo la curva correspondiente a la distribución uniforme. La curva de Lorenz es la representación gráfica de la distribución acumulada de una distribución de probabilidad (Ver Figura 2.1).

Generalmente, el coeficiente de Gini se usa para medir la desigualdad en el ingreso de una población, y se expresa por un número entre 0 y 1, donde 0 corresponde

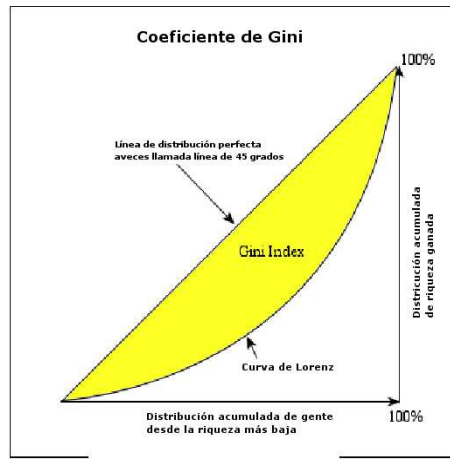


Figura 2.1: *Cálculo del coeficiente de Gini [23].*

a la igualdad perfecta (todos los individuos tienen el mismo ingreso) y 1 corresponde a la máxima desigualdad (un individuo posee todo el ingreso, mientras que los demás tienen ingreso cero). Este coeficiente también puede ser usado para medir la desigualdad de riqueza en una población.

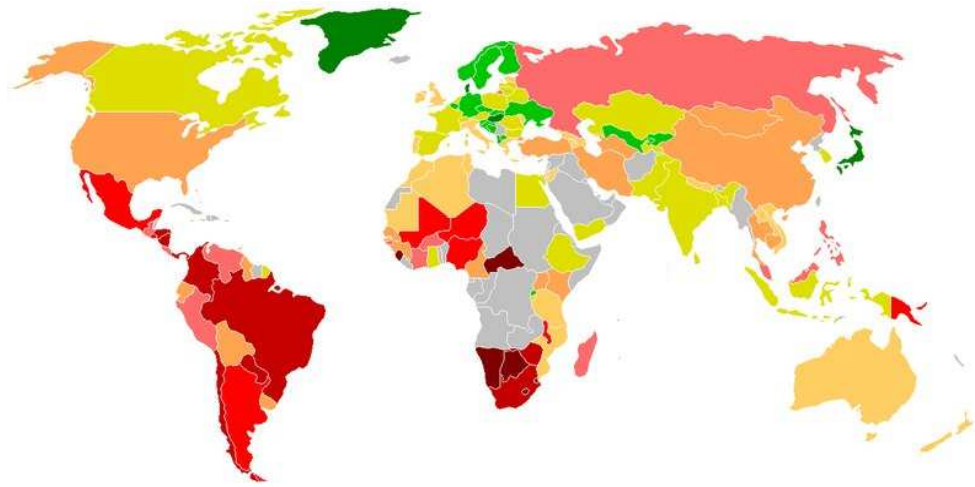
El índice de Gini es el coeficiente de Gini expresado como un porcentaje y es igual al coeficiente de Gini multiplicado por 100.

En la Figura 2.2 se observa el coeficiente de Gini para diversos países. Para cada país, el coeficiente de Gini fue calculado en diferentes años. Una tabla más completa de este estudio se puede observar en la referencia [19].

La Figura 2.3 muestra la evolución del índice de Gini para algunos países a partir de la Segunda Guerra Mundial. Mientras que los países desarrollados de Europa tienden a mostrar índices de Gini entre 24 y 36, Estados Unidos tiene un índice por encima de 40, indicando que posee una mayor desigualdad de ingreso en su población.

Para el modelo de intercambio de riqueza en una sociedad estratificada propuesto por Laguna *et al.* se calculó la variación del coeficiente de Gini para algunos valores de parámetro. Los valores reportados en el artículo de Laguna *et al.* se encuentran en el Cuadro 2.1

Como se puede observar, los valores de los coeficientes de Gini más altos corresponden a valores intermedios de  $u$ , para los cuales se encuentra presente la brecha



Color	Gini coefficient				
<span style="color: green;">■</span>	< 0,25	<span style="color: orange;">■</span>	0,35 - 0,39	<span style="color: red;">■</span>	0,55 - 0,59
<span style="color: green;">■</span>	0,25 - 0,29	<span style="color: orange;">■</span>	0,40 - 0,44	<span style="color: darkred;">■</span>	> 0,60
<span style="color: yellow;">■</span>	0,30 - 0,34	<span style="color: pink;">■</span>	0,45 - 0,49	<span style="color: gray;">■</span>	NA
		<span style="color: red;">■</span>	0,50 - 0,54		

Figura 2.2: *El coeficiente de Gini en el mundo [23].*

$f - u$	0.005	0.1	0.05	0.1	0.5	1	5	10	100
0.1	0.819	0.916	0.952	0.963	0.982	0.992	0.987	0.976	0.915
0.3	0.819	0.840	0.953	0.964	0.978	0.971	0.920	0.840	0.674
0.5	0.818	0.915	0.950	0.974	0.962	0.932	0.690	0.488	0.472

Cuadro 2.1: *Coeficientes de Gini para los diferentes parámetros considerados [15].*

de la clase media. Sólo para valores altos de  $f$  y  $u$  se obtienen coeficientes cercanos a los obtenidos para diferentes países. Aunque algunos de los valores de los coeficientes de Gini que se obtienen en las simulaciones son muy cercanos a 1, el valor más alto observado en sociedades reales es del orden de 0.7.

En esta tesis calcularemos el coeficiente de Gini  $G$  en el estado asintótico del sistema ( $t \rightarrow \infty$ ) de la siguiente manera [20]

$$G = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |w_i - w_j|}{2N^2\mu}, \quad (2.2)$$

donde  $w_i$  es la riqueza del elemento  $i$ ,  $N$  el número de elementos que conforman el

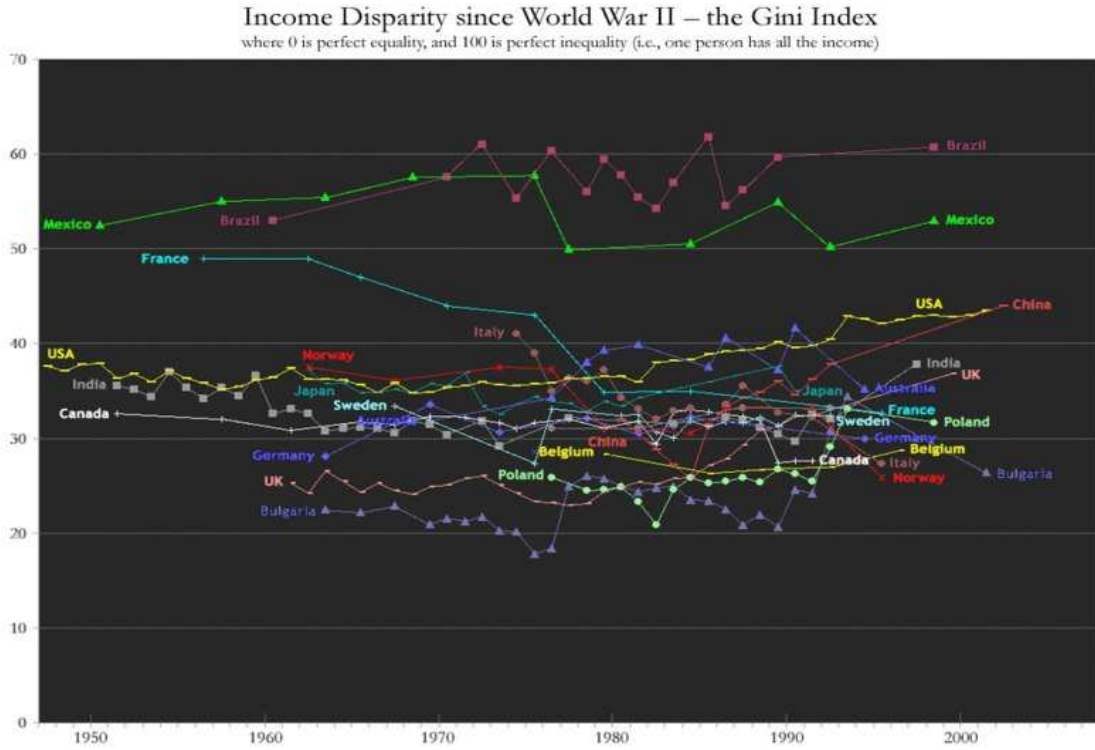


Figura 2.3: Índice de Gini de algunos países a partir de la segunda guerra mundial [23].

sistema y  $\mu$  la riqueza promedio del sistema.

Otro parámetro de orden novedoso que proponemos para caracterizar el comportamiento colectivo del sistema se basa en una cantidad definida por Ito y Kaneko [21], llamada *actividad del sistema*. Esta cantidad mide la magnitud del cambio temporal en las conexiones de una red por unidad de tiempo. En esta tesis, utilizaremos la actividad como una medida de los cambios de estado o riqueza de los elementos y la definimos como

$$A = \frac{1}{N} \frac{1}{T - \tau} \sum_{i=1}^N \sum_{t=\tau}^T |w_t^i - w_{t-1}^i| = \frac{1}{N} \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T dw_t, \quad (2.3)$$

Aquí  $A$  mide el cambio promedio de estados o riqueza de los elementos en el espacio y en el tiempo.

También definimos un parámetro de recesión  $R$ . Este índice mide el número de veces que se cumplen los pasos 1 y 2 del algoritmo y en el que no se cumple el paso

3 del mismo. El parámetro  $R$  expresa el número de intentos fallidos de interacción promediados cada  $N$  iteraciones, donde  $N$  es el tamaño del sistema. Si el número de veces que no hay interacción en el sistema en un lapso  $N$  iteraciones es  $n$ , la recesión se define como

$$R = \frac{n}{N}. \quad (2.4)$$

Cabe enfatizar que estos parámetros de orden son generales y que pueden ser usados para caracterizar propiedades colectivas y la dinámica espaciotemporal de diversos sistemas dinámicos, incluyendo dinámicas de intercambio económico, como la que estudiamos en esta tesis.

### 2.3. Intercambio económico en una dimensión.

La figura 2.4 muestra una red unidimensional con condiciones de borde periódicas para la cual  $k = 2$  (cada elemento está conectado con sus primeros vecinos).

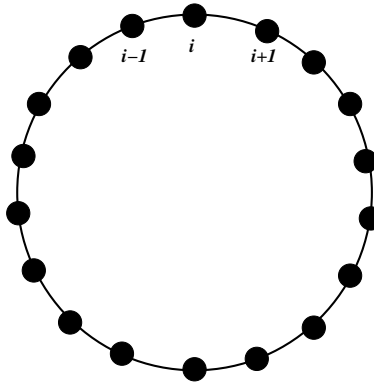


Figura 2.4: Red unidimensional con  $k = 2$  y condiciones de borde periódicas.

En esta sección estudiaremos las propiedades estadísticas y los patrones espaciotemporales resultantes de las reglas dinámicas definidas en el algoritmo presentado en la Sección 2.1 y aplicadas a una red unidimensional.

Consideraremos una red unidimensional de  $N = 10^4$  con  $k = 2$  y un tiempo de simulación de  $t = 10^4 N$  iteraciones. Como condición inicial empleamos una distribución aleatoria uniforme de riquezas  $w_i(0) \in [0, \Delta w]$ . El ancho de la distribución inicial es, por lo tanto,  $\Delta w(0) = 1$ .

Al realizar las simulaciones con las reglas dinámicas dadas con el algoritmo, se observa que luego de un transiente el sistema llega a un estado estacionario donde la riqueza ha sido redistribuida. Para cada conjunto de parámetros, se calculan los valores promedios de las distintas cantidades estadísticas sobre 10 realizaciones diferentes de condiciones iniciales.

Para valores muy pequeños de los parámetros  $u$  y  $f$ , el sistema mantiene prácticamente las mismas características de la distribución inicial de riqueza. Al aumentar los valores de  $u$  y  $f$ , la distribución asintótica de riqueza cambia significativamente. La Figura 2.5 muestra dos distribuciones asintóticas de riqueza para distintos valores de  $u$  y  $f$ .

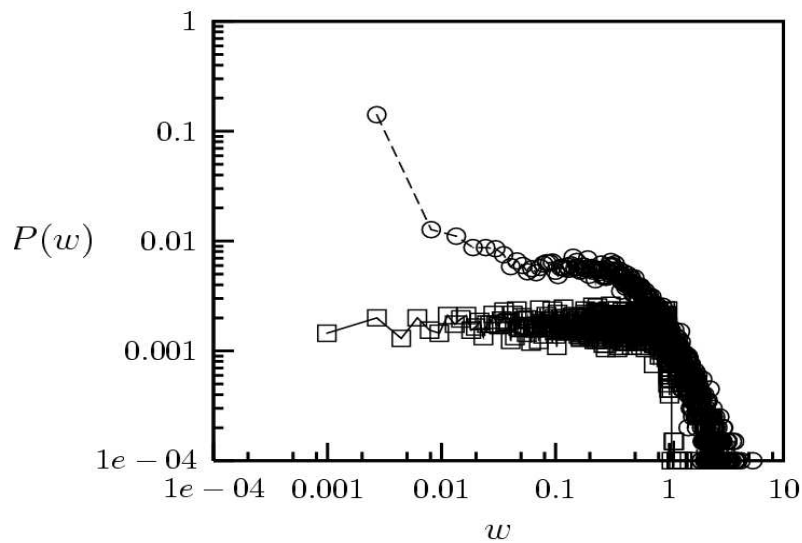


Figura 2.5: *Distribución asintótica de riqueza para diferentes valores de  $u$  y  $f$  en una red unidimensional. Línea con cuadros corresponde a  $u = 0,01$  y  $f = 0,01$ , coeficiente de Gini  $G = 0,002$ . Línea con círculos,  $u = 10$  y  $f = 0,3$ ;  $G = 0,213$ .*

Puesto que la riqueza se distribuye inicialmente en forma uniforme, cuando  $u = 0,01$  sólo interactúan elementos adyacentes cuya diferencia de riqueza es muy pequeña, lo cual permite que sólo unos pocos elementos puedan disminuir o incrementar su riqueza. De esta manera se puede observar en la Figura 2.5 que existen pocos elementos cuya riqueza es mayor que 1.

Para  $u = 10$ , las interacciones entre los elementos adyacentes son más fre-



cuentas, permitiendo un mayor intercambio de riqueza que en el caso cuando  $u$  es pequeño.

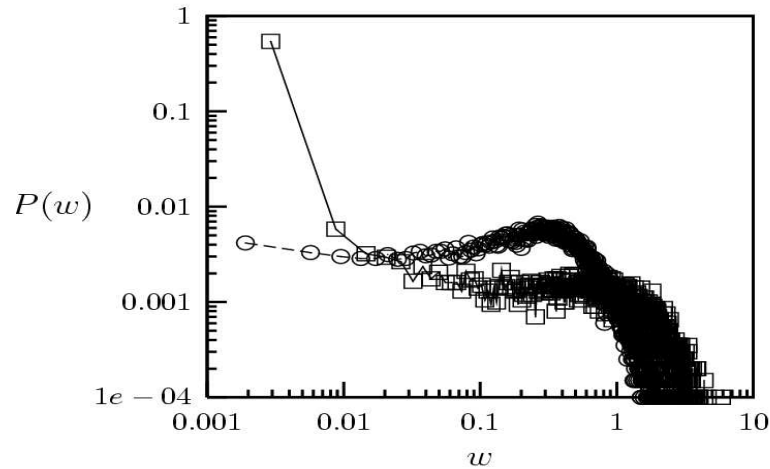


Figura 2.6: *Distribuciones de riqueza con  $u = 100$  y  $f = 0,1$  (cuadros) y  $f = 0,5$  (círculos).*

La Figura 2.6 muestra la distribución asintótica de riqueza para  $u = 100$  y dos valores de  $f$ . Se observa que para valores suficientemente grandes de los parámetros  $u$  y  $f$  en la red unidimensional, los resultados son similares a los obtenidos en el modelo de Laguna *et al.*, donde no existe ubicación espacial de los agentes. Esto muestra que deben existir valores de  $u$  y de  $f$  para los cuales las propiedades estadísticas del sistema no dependen de la topología de interacción entre los elementos.

En el Capítulo 3 estudiaremos la influencia de la topología en la ocurrencia del fenómeno de desaparición de la clase media.

La Figura 2.7 muestra el coeficiente de Gini en el estado asintótico del sistema en función del parámetro  $u$  para distintos valores del parámetro  $f$ . La Figura 2.7 revela que para cada valor de  $f$ , existe un valor crítico de  $u$  para el cual el sistema experimenta una transición de una fase equitativa de riqueza entre los elementos, caracterizada por  $G = 0$ , a una fase de desigualdad en la distribución de riqueza para la cual  $G \neq 0$  y  $G$  aumenta con  $u$ . El valor crítico para los valores mostrados es  $u \approx 1$ .

También se observa en la Figura 2.7 que los valores del coeficiente de Gini para

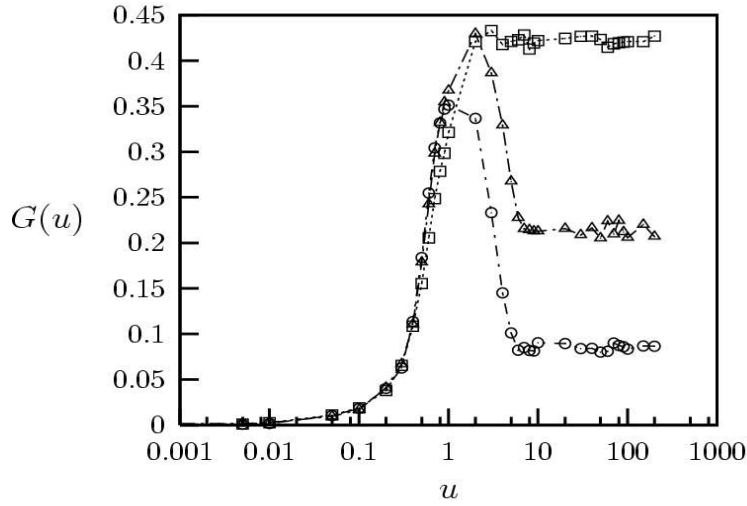


Figura 2.7: Coeficiente de Gini en función de  $u$  para distintos valores del parámetro  $f$ . Cuadro  $f = 0,1$ ; triángulo  $f = 0,3$ ; círculo  $f = 0,5$ .

nuestro modelo unidimensional son comparables a los valores reportados para algunos países en la Figura 2.2 y son más pequeños, en general, que los valores obtenidos en el modelo sin topología de Laguna *et al.*

La Figura 2.8 muestra el comportamiento del parámetro de orden  $R$ , la recesión, en el espacio de parámetros  $u$  y  $f$ . Se observa que existe una región de valores del parámetro  $u$  pequeño en la cual la recesión es alta; es decir el intercambio económico es prácticamente nulo. Para valores mayores de  $u$  la recesión se reduce y para valores de  $u$  muy altos  $R = 0$ , es decir, ocurre intercambio económico permanente. Nótese que la variación en  $f$  no afecta considerablemente la recesión del sistema. La transición entre la fase inactiva y la fase activa ocurre para un valor crítico  $u \approx 1$ . En general, la transición entre estas fases de  $R$  ocurre para  $u \approx \Delta w(0)$ .

La Figura 2.9 muestra el valor del coeficiente de Gini en el espacio de parámetros  $u$  y  $f$ . Nótese que existe un incremento considerable en el valor del coeficiente de Gini para valores grandes de  $u$  y valores pequeños de  $f$ .

La Figura 2.10 muestra la actividad  $A$  del sistema en función de  $u$  y  $f$ . Se observa que la actividad es alta para valores grandes de  $u$  y de  $f$ .

Nótese que tanto el coeficiente de Gini como la actividad del sistema adquieren

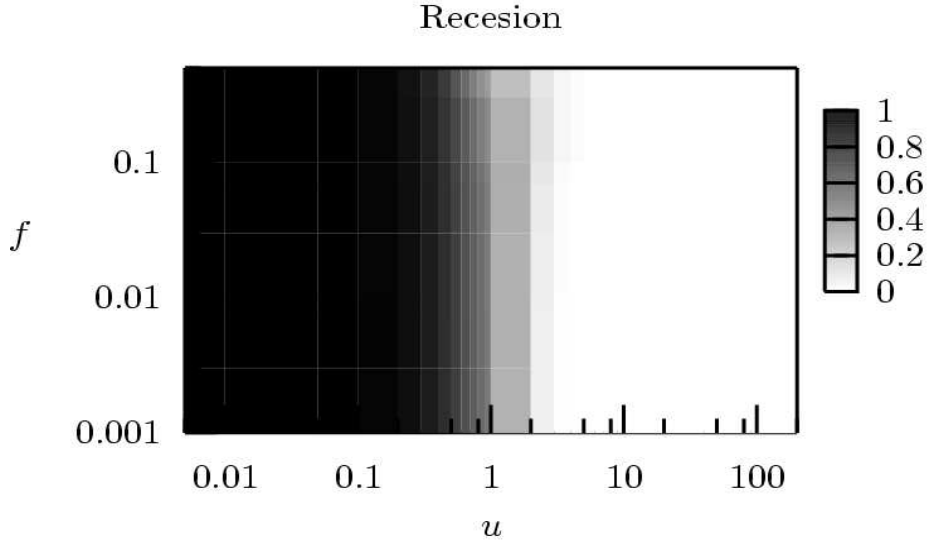


Figura 2.8: *Recesión del sistema en función de  $u$  y  $f$  en sistema unidimensional. (Cambiar el nombre de la figura.)*

valores altos para valores grandes de los parámetros  $u$  y  $f$ . En particular, valores de  $u$  grandes permiten una mayor probabilidad de interacción entre elementos adyacentes en la red y, por lo tanto, una mejor distribución de la riqueza del sistema, manifiesta en valores menores del coeficiente de Gini (sociedad más equitativa). Por otro lado, valores grandes de  $f$  favorecen el flujo de riqueza hacia los elementos de menor riqueza, trayendo como consecuencia una disminución en los valores del coeficiente de Gini. Nuestro modelo muestra un resultado relevante: *el incremento de la actividad económica está ligada a la disminución de la desigualdad en el sistema.*

El parámetro de orden  $A$  permite diferenciar dos estados colectivos en el sistema: un estado de actividad baja y un estado de alta actividad, como se muestra en la Figura 2.10. Estos estados corresponden a comportamientos dinámicos espaciotemporales diferentes que ocurren en el sistema. El estado con  $A = 0$  corresponde a una fase *laminar*, caracterizada por un comportamiento estacionario de los elementos en el tiempo, como se muestra en la Figura 2.11, panel izquierdo. El estado con  $A \neq 0$  está asociado con una fase *turbulenta* (caos espaciotemporal), en la cual los

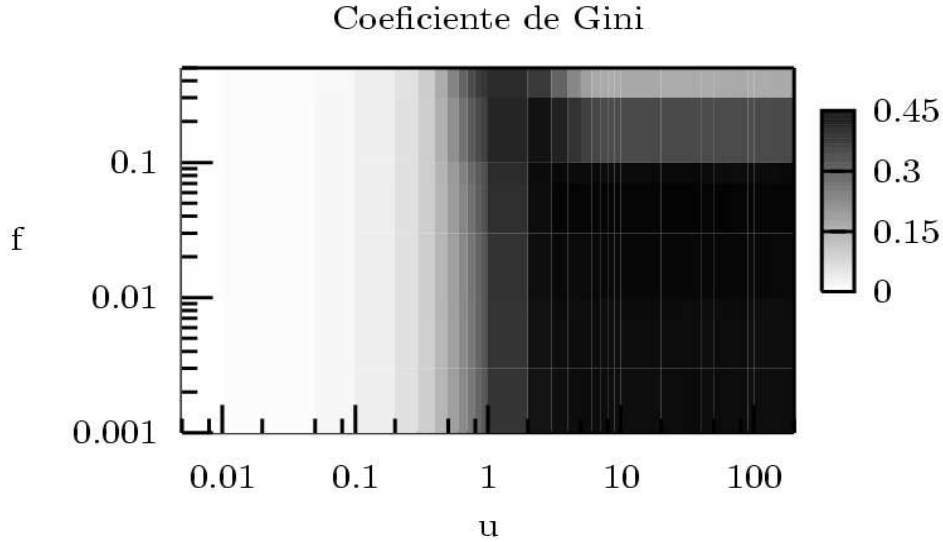


Figura 2.9: *Coeficiente de Gini ( $G$ ) en función de  $u$  y  $f$  en sistema unidimensional.*

elementos cambian de estado permanentemente en el tiempo, y se muestra en el panel derecho de la Figura 2.11. La transición a la fase turbulenta tiene lugar mediante la aparición de intermitencia espaciotemporal, que consiste en la coexistencia de estados laminares y caóticos en el tiempo, y la cual ha sido observada en diversos sistemas dinámicos espaciotemporales [22].

La fase turbulenta aparece para valores grandes de  $u$  y de  $f$ . En esta fase prácticamente ningún elemento puede mantener o acumular una riqueza estable, sino que ésta es continuamente redistribuida en el sistema.

## 2.4. Intercambio económico en dos dimensiones.

En esta sección consideraremos la dinámica de intercambio económico estratificado definida en la Sección 2.1 para el caso de un sistema bidimensional. Específicamente, estudiaremos una red regular en dos dimensiones con  $k = 4$ , es decir, cada elemento está conectado con sus cuatro vecinos más cercanos.

La Figura 2.12 muestra la recesion  $R$  en el espacio de parámetros  $(f, u)$ . El com-

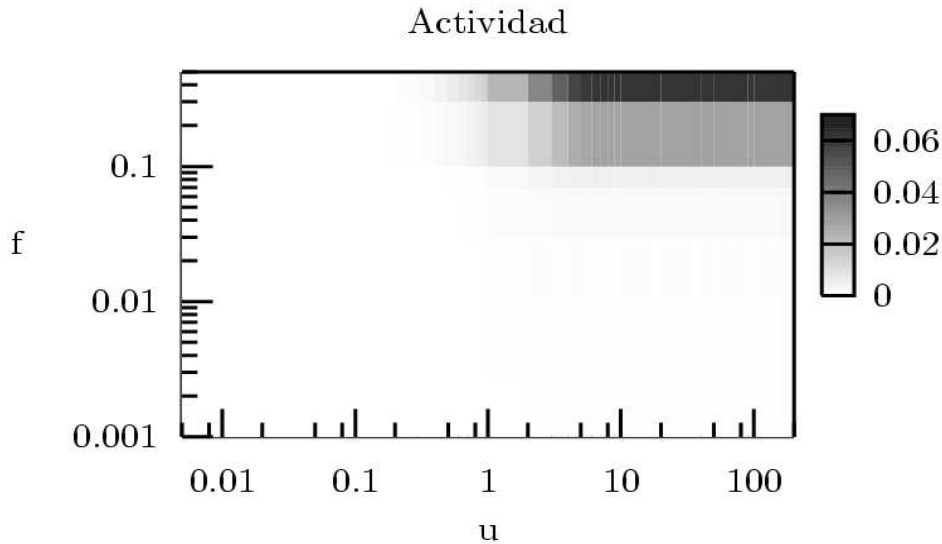


Figura 2.10: *Actividad del sistema en función de  $u$  y  $f$  en sistema unidimensional.*

portamiento de  $R$  para la red bidimensional es muy similar al caso unidimensional. La transición de  $R = 1$  a  $R = 0$  ocurre para un valor de  $u \approx \Delta w(0)$ .

En la Figura 2.13 se observa el coeficiente de Gini en el espacio de parámetros  $(f, u)$ . El coeficiente de Gini se comporta cualitativamente similar al caso unidimensional. Sin embargo, los valores máximos del coeficiente de Gini son del orden de  $G_{\max} \approx 0,7$ , mayores que los valores máximos de  $G$  para una red unidimensional ( $G_{\max} \approx 0,45$ ). Este incremento de los valores de  $G$  se debe al aumento del número de vecinos  $k$  conectados a cada elemento. El estudio sistemático de la influencia del número de vecinos  $k$  en la propiedades estadísticas del sistema se presenta en el Capítulo 3.

La Figura 2.14 muestra la actividad  $A$  del sistema en el espacio de parámetros  $(f, u)$ . Como en el caso unidimensional, la actividad es máxima para valores grande de  $f$  y de  $u$ . La región donde  $A = 0$  corresponde a un patrón espaciotemporal estacionario, es decir, a un estado laminar. La región en la cual  $A \neq 0$  se caracteriza por la presencia de una fase turbulenta en el sistema.

La Figura 2.15 muestra una comparación del coeficiente de Gini para una red

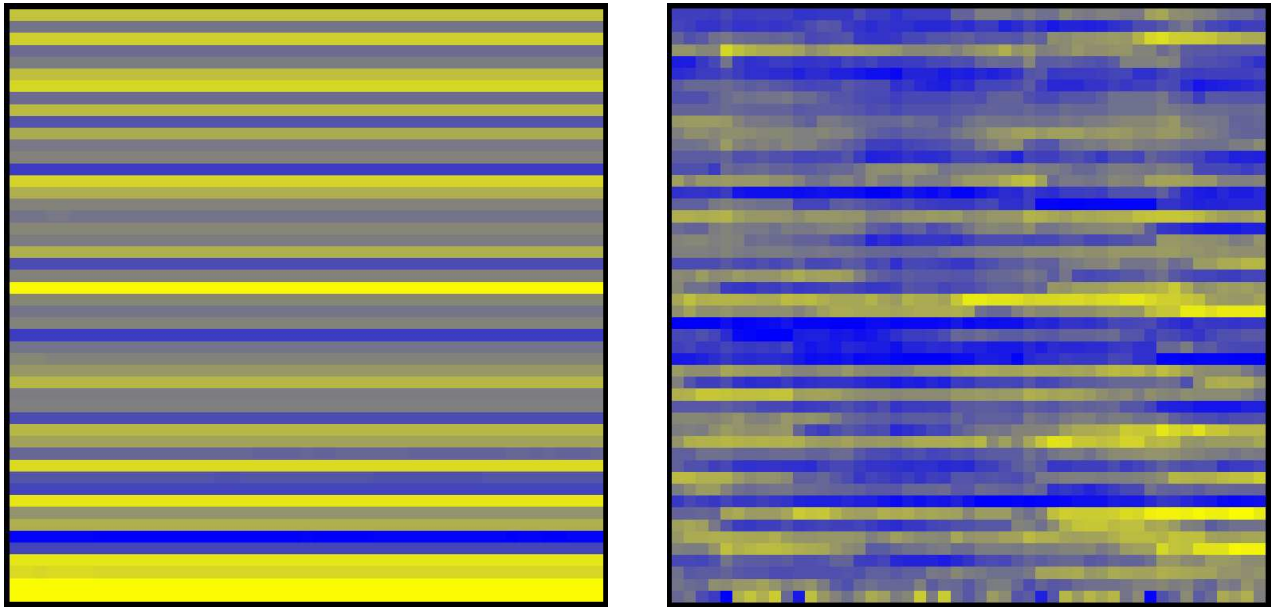


Figura 2.11: *Evolución espaciotemporal del sistema unidimensional con  $N = 50$  elementos. Eje vertical corresponde al espacio; eje horizontal corresponde al tiempo. El color azul indica riquezas altas, mientras que color amarillo indica valores de riqueza más pequeños. Panel izquierdo:  $u = 10$  y  $f = 0,001$ ; fase laminar, con  $A = 0$ . Panel derecho:  $u = 150$  y  $f = 0,3$ ; fase turbulenta, con  $A \neq 0$ .*

unidimensional y para una red bidimensional, en función de  $f$  con  $u = 30$ . Nótese que los valores de  $G$  para la red bidimensional son mayores en relación a los valores de  $G$  correspondientes a la red unidimensional.

En la Figura 2.16 se observa la actividad  $A$  en función de  $f$  para un valor de fijo de  $u = 30$ , para redes de una y de dos dimensiones. La actividad es prácticamente indistinguible en ambas redes.

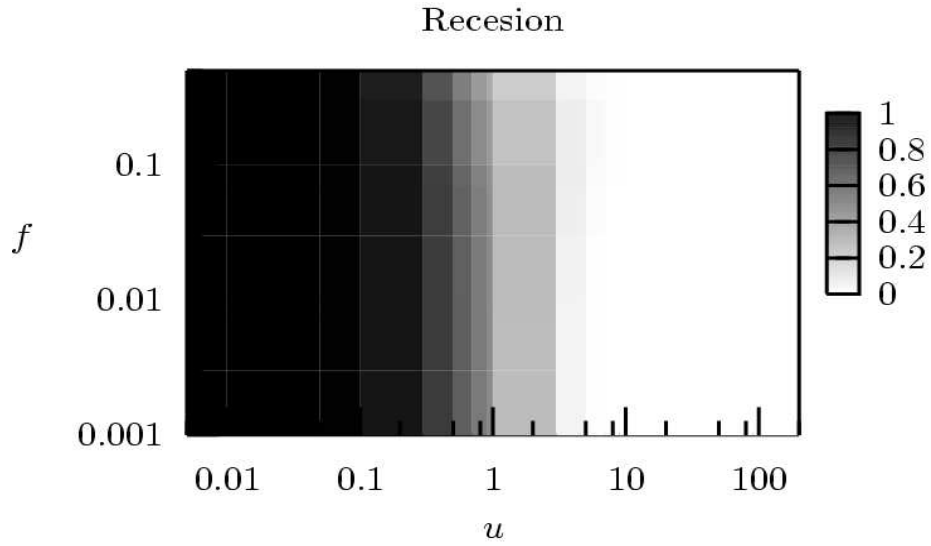


Figura 2.12: *Recesion del sistema en función de  $u$  y  $f$  para una red bidimensional.*

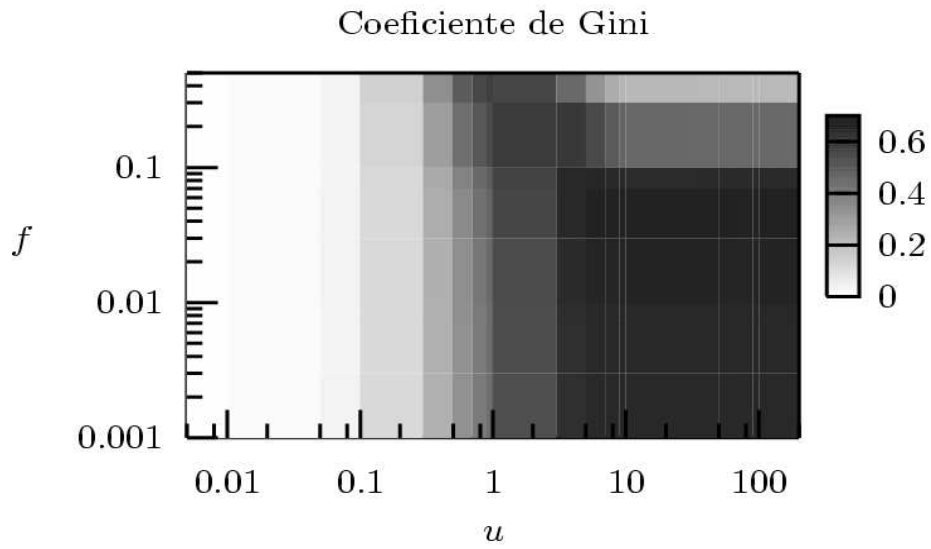


Figura 2.13: *Coeficiente de Gini en función de  $u$  y  $f$  para una red bidimensional.*

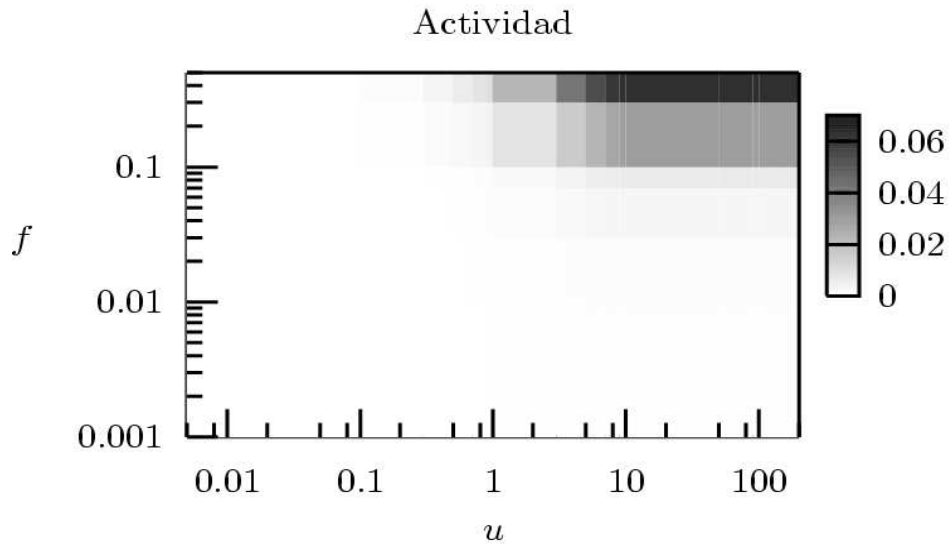


Figura 2.14: Actividad del sistema en función de  $u$  y  $f$  para una red bidimensional.

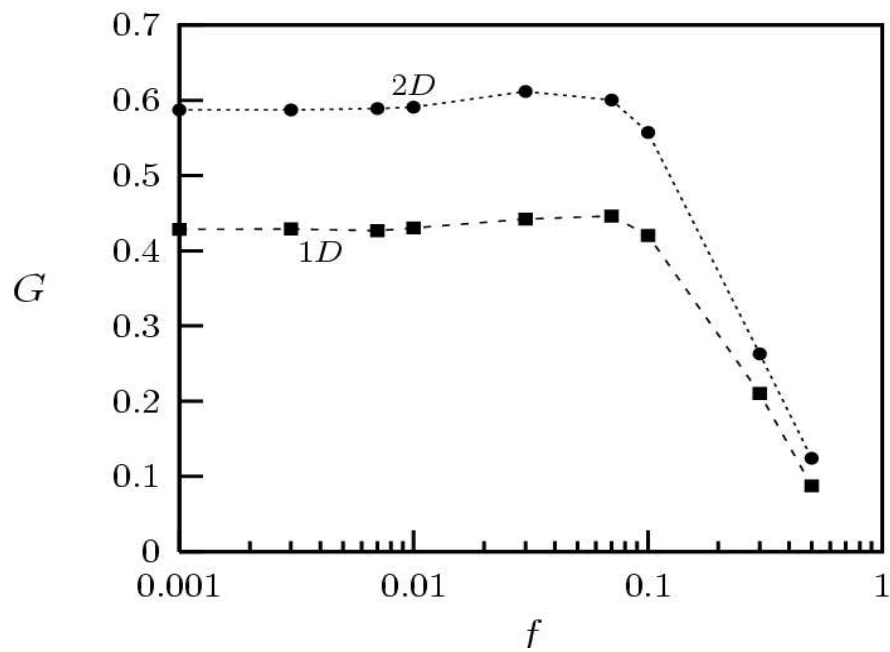


Figura 2.15: Coeficiente de Gini en función de  $f$  para un sistema en una (cuadrados) y en dos dimensiones (círculos).  $u = 30$ .



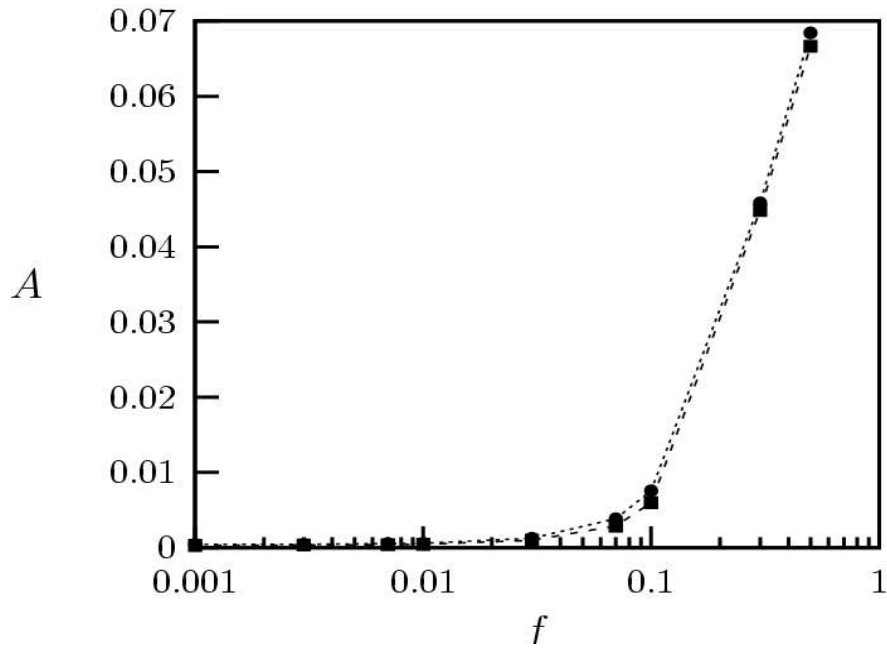


Figura 2.16: *Actividad del sistema para una dimension (círculos) y dos dimensiones (cuadrados) en función de  $f$ , para  $u = 30$ .*

*The ability to reduce everything to simple fundamental laws does not  
imply the ability to start from those laws and reconstruct the universe.*

Edgar Allan Poe

## Capítulo 3

# ¿Por qué desaparece la clase media?.

## Aumentando la vecindad.

La mayoría de los modelos que se han propuesto en la creciente literatura de Econofísica consideran que las interacciones entre agentes económicos se realizan entre elementos escogidos en forma aleatoria. Este tipo de interacción es equivalente a considerar que los agentes del sistema económico se encuentren inmersos en una topología o red de conectividad global, es decir, todos los elementos están conectados con todos. Esta aproximación implica una analogía de los sistemas económicos con sistemas termodinámicos sujetos a una interacción de tipo campo medio, lo cual permite utilizar todo el arsenal de la Mecánica Estadística desarrollado para este tipo de sistemas. Hasta ahora solamente una pequeña porción de los artículos publicados en el área consideran la presencia de alguna topología no trivial de conectividad entre los agentes económicos [5, 11]. Sin embargo, hasta donde tenemos conocimiento, un estudio sistemático de la influencia de la topología en modelos económicos no ha sido realizado.

En este Capítulo estudiaremos el rol de la topología de conectividad en el modelo de intercambio económico estratificado que hemos considerado en el Capítulo

anterior. En el Capítulo 2 vimos el comportamiento estadístico y los patrones espaciotemporales que emergen en sistemas definidos en redes regulares de una y de dos dimensiones. Esto corresponde a los casos  $k = 2$  y  $k = 4$ , respectivamente, donde  $k$  es el número de vecinos conectados con cada agente del sistema. Nos encargaremos ahora de la investigación de la influencia del tamaño de la vecindad  $k$  en las propiedades colectivas del sistema. Específicamente, estudiaremos la distribución de riqueza, el coeficiente de Gini, la recesión y la actividad de sistema cuando se varían los parámetros  $u$ ,  $f$  y  $k$ .

### 3.1. Aumentando la vecindad.

La dinámica que regirá el comportamiento de los agentes económicos es la misma que fué introducida en el Capítulo 2. Los agentes económicos se encuentran ubicados inicialmente en los vértices de una red unidimensional con condiciones de contorno periódicas. La vecindad de cada elemento puede incrementarse conectando segundos vecinos, terceros vecinos, etc. El número de vecinos conectados a cada elemento es  $k$ , es decir, consideraremos redes regulares. La Figura 3.1 muestra una red con  $k = 4$  (segundos vecinos) construida a partir de una red unidimensional.

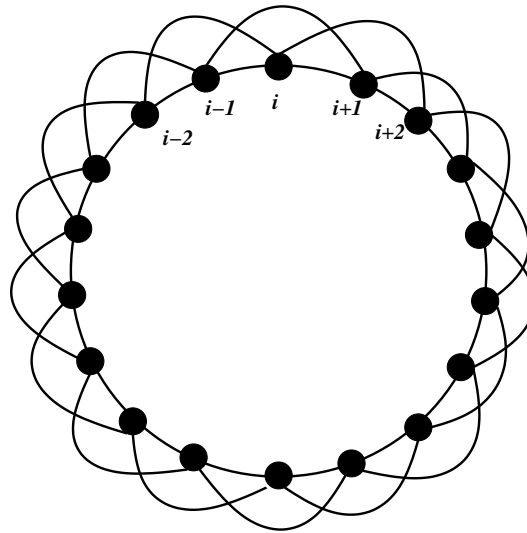


Figura 3.1: Red unidimensional con  $k = 4$  y condiciones de borde periódicas.

Consideramos sistemas de tamaño  $N = 10^4$  y las cantidades estadísticas se han calculado como promedios de 5 realizaciones diferentes de condiciones iniciales para cada conjunto de parámetros  $u$ ,  $f$  y  $k$ . El tiempo de simulación fue de  $t = 10^8$  iteraciones, considerando que este tiempo es lo suficientemente largo para que el sistema llegue a una condición de equilibrio.

A continuación mostramos los resultados para diversos valores de parámetros.

1)  $f = 0$ .

Recordemos que el parámetro  $f$  es una probabilidad que tiende a favorecer al elemento de menor riqueza en una transacción entre dos elementos. Cuando  $f = 0$ , independientemente de la riqueza de los elementos que interactúan, ambos tienen la misma probabilidad de salir favorecidos en la transferencia de riqueza.

La Figura 3.2 muestra el comportamiento del coeficiente de Gini en función de los parámetros del sistema  $u$  y  $k$  con  $f = 0$ .

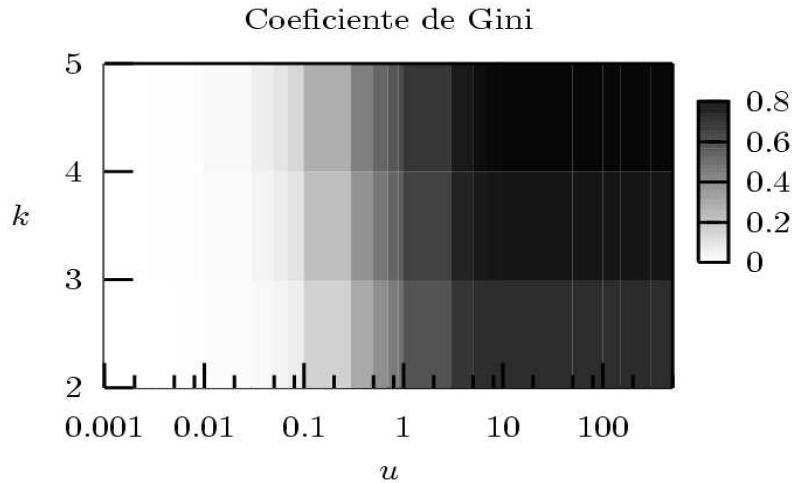


Figura 3.2: *Coeficiente de Gini en función de  $k$  y  $u$ .  $f = 0$ .*

Para este caso se observa que  $G \approx 0$  para valores  $u < 1$ . Cuando  $u > 1$ ,  $G$  aumenta significativamente. También, el valor de  $G$  aumenta con el tamaño

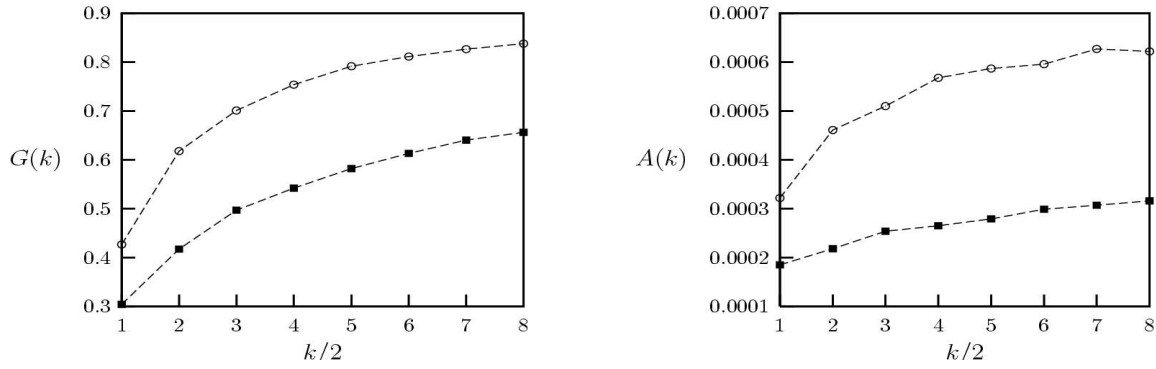


Figura 3.3: *Panel izquierdo: Coeficiente de Gini ( $G$ ) en función de  $k$  para  $f = 0$ ,  $u = 1$  (cuadrados) y  $u = 10$  (círculos). Panel derecho: Actividad de sistema ( $A$ ) en función de  $k$  para  $f = 0$ ,  $u = 1$  (cuadrados) y  $u = 10$  (círculos)*

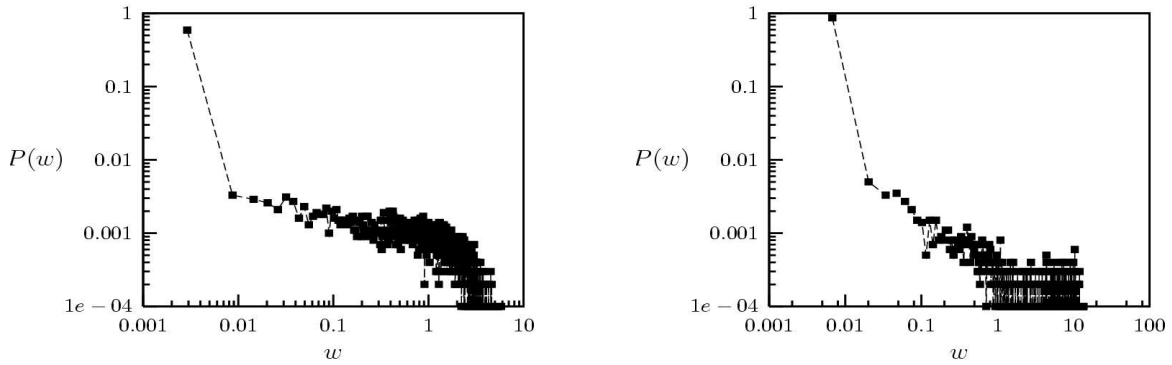


Figura 3.4: *Distribución de riqueza del sistema para  $k = 16$  y  $f = 0$ : Panel izquierdo  $u = 0,3$ , panel derecho  $u = 10$ .*

de la vecindad como se observa en la Figura 3.3 panel izquierdo.

En la Figura 3.3 panel derecho, se puede observar el comportamiento de  $A$  en función de  $k$  para  $f = 0$  y dos valores de  $u$ .

En la Figura 3.4 se pueden observar dos distribuciones de riqueza del sistema en el estado asintótico con  $k/2 = 8$ . Cuando el umbral de interacción es muy pequeño (panel izquierdo  $u = 0,3$ ) sólo los agentes con riquezas similares pueden intercambiar riqueza, por lo tanto, se observa que se mantiene una distribución uniforme de riqueza para valores intermedios de  $w$ , parecida a la distribución inicial aleatoria. Sin embargo, muchos elementos han perdido casi

toda si riqueza y unos pocos han logrado acumular una gran cantidad de  $w$ . Cuando  $u = 10$  (panel derecho), existen más oportunidades de interacción y, como consecuencia, una mayor redistribución de los recursos. La distribución muestra una ley de potencia tanto para el rango de riquezas pequeñas (*low income*) como para el rango de riquezas grandes (*high income*).

Nótese que para el caso  $f = 0$  no aparece el efecto de la desaparición de la clase media en las distribuciones de riqueza.

**2) Para  $f = 0,1$ .**

La variación de  $G$  en función de  $u$  y  $k$  se muestra en la Figura 3.5.

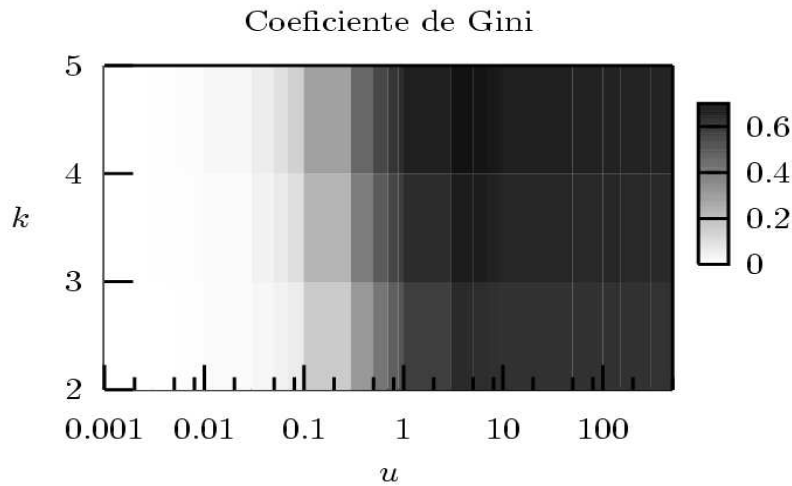


Figura 3.5: Variación del coeficiente de Gini en función de  $k$  y  $u$ .  $f = 0,1$ .

La Figura 3.5 muestra que, al igual que el caso  $f = 0$ , existe una transición en  $G$  cuando se alcanza el valor crítico  $u \approx 1$ ; aunque los valores máximos de  $G$  para  $f = 0,1$  son menores que para  $f = 0$ . Al aumentar la probabilidad de favorecer al elemento con menor riqueza en una transacción hay una mayor redistribución de riqueza en el sistema, lo cual permite distribuciones más equitativas. El rango de valores alcanzados por  $G$  en este caso es similar al rango variación del índice de Gini medido en los países del mundo, según

la O.N.U. (ver Apéndice). En contraste, el rango de valores de  $G$  obtenido con el modelo de interacciones globales de Laguna *et al.* es superior al rango observado en los países del mundo.

La Figura 3.6 muestra la variación de  $G$  con el tamaño de la vecindad  $k$  (panel izquierdo), así como el comportamiento de  $A$  en función de  $k$  (panel derecho).

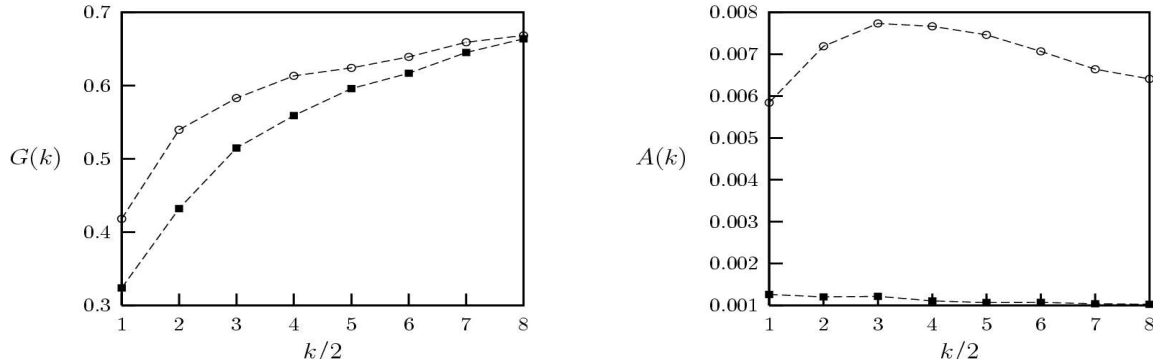


Figura 3.6: *Panel izquierdo: Coeficiente de Gini ( $G$ ) en función de  $k$  para  $f = 0,1$ ,  $u = 1$  (cuadrados) y  $u = 10$  (círculos). Panel derecho: Actividad de sistema ( $A$ ) en función de  $k$  para  $f = 0,1$ ,  $u = 1$  (cuadrados) y  $u = 10$  (círculos).*

El coeficiente de Gini  $G$  aumenta cuando el número de vecinos se incrementa. Para  $u = 1$  el aumento de  $G$  ocurre más rápidamente que para  $u = 10$ . En todos los casos  $G$  alcanza un mismo valor asintótico que corresponde al límite de  $k$  muy grande, es decir, acoplamiento global.

En la Figura 3.6 panel derecho, se observa que  $A$  no cambia considerablemente al aumentar  $k$ . Esto significa que la actividad del sistema está más ligada a la dinámica de interacción que a la topología subyacente de la red.

La Figura 3.7 muestra dos distribuciones de riqueza del sistema para distintos valores de  $k$  con  $u = 0,3$ . Para  $k = 4$  se observa la aparición incipiente de una brecha que separa dos regiones bien definidas en la distribución de riqueza. Esta brecha se hace más notable al aumentar  $k$  como muestra el panel derecho de esta figura. Este es el efecto de desaparición de la clase media reportado por Laguna *et al.* [15] en el caso de acoplamiento global, es decir,  $k$  muy grande.

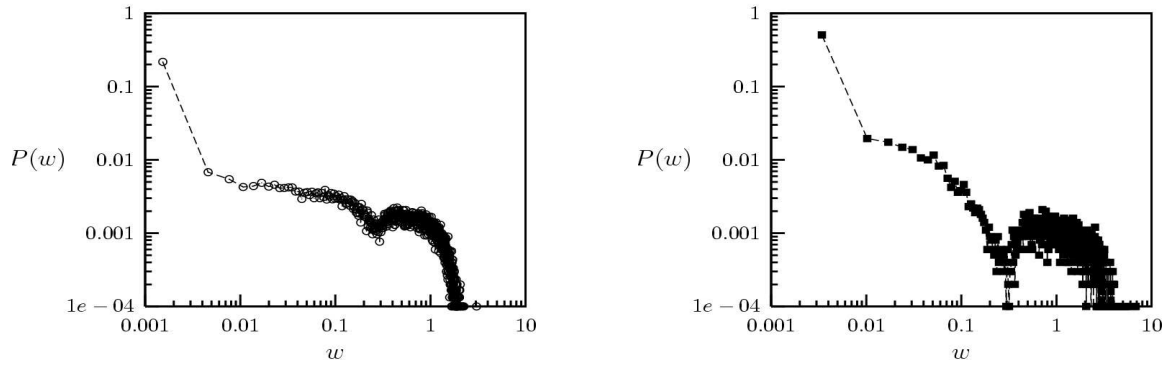


Figura 3.7: *Distribución de riqueza del sistema con  $u = 0,3$  y  $f = 0,1$ . Panel izquierdo  $k = 4$ , panel derecho  $k = 16$ .*

Nuestros resultados muestran que el efecto de desaparición de la clase media está relacionado con el aumento de  $k$ . Por otro lado, la distribución  $P(w)$  para valores  $w$  altos no sigue una ley de potencia cuando se incluye vecindad en el sistema. Luego, la presencia de interacciones locales podría explicar desviaciones de la ley de Pareto observadas en algunos sistemas económicos.

La Figura 3.8 muestra dos distribuciones de riqueza del sistema para distintos valores de  $k$ , pero con  $u = 10$ . No se observa el efecto de desaparición de la clase media cuando  $u$  es suficientemente grande, independientemente del tamaño de la vecindad  $k$ , ya que pueden ocurrir transacciones entre todos los elementos vecinos.

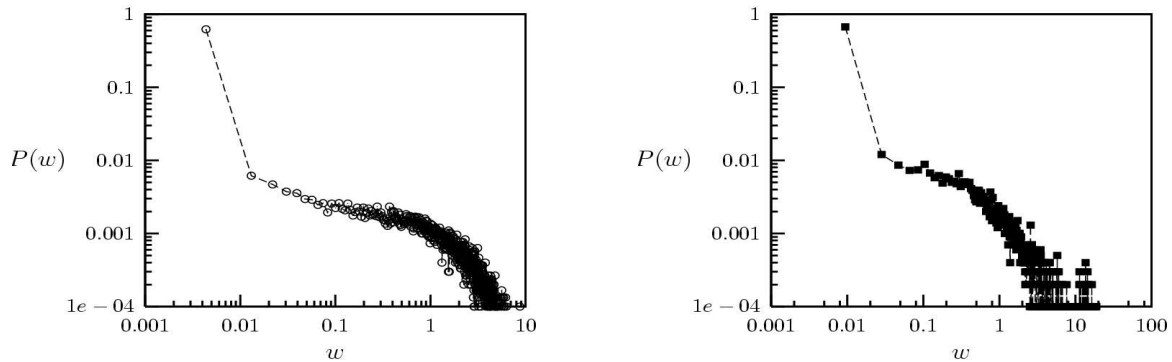


Figura 3.8: *Distribución de riqueza del sistema con  $u = 10$  y  $f = 0,1$ . Panel izquierdo  $k = 4$ , panel derecho  $k = 16$ .*



3) Para  $f = 0,5$ .

La Figura 3.9 muestra el comportamiento del coeficiente de Gini en el espacio de parámetros  $(k, u)$  para  $f = 0,5$ .

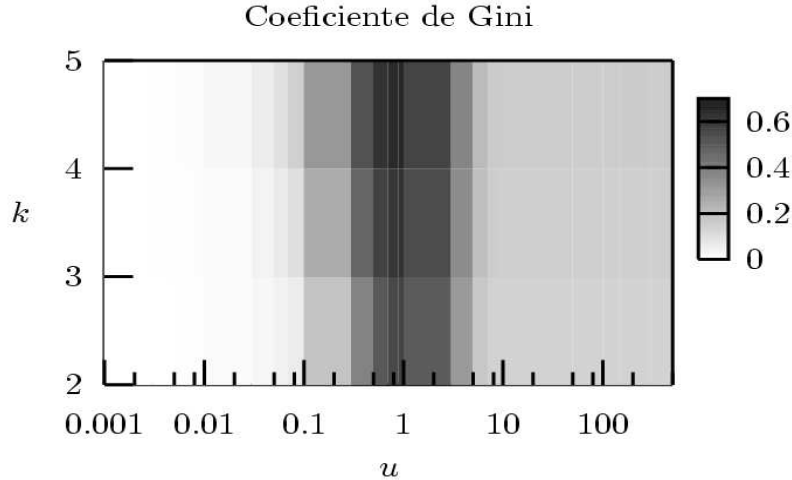


Figura 3.9: Variación del coeficiente de Gini en función de  $k$  y  $u$ .  $f = 0,5$ .

El comportamiento de  $G$  en el espacio de parámetros se encuentra caracterizado por tres regiones. La primera región está comprendida para valores de  $u \in [0,001; 0,1]$ . En esta región  $G \approx 0$ , lo cual indica que la riqueza del sistema se encuentra distribuida en forma equitativa, como en la distribución inicial. La segunda región se encuentra para  $u \in [0,1; 7]$ , donde  $G$  aumenta significativamente, alcanzando un valor máximo cuando  $u \approx 1$  para luego disminuir. La tercera región está en  $u \in [7; 500]$ . En esta región,  $G$  se mantiene prácticamente constante, tanto para cualquier valor de  $u$  como para cualquier  $k$ . Esta disminución en  $G$  sólo se observa para valores altos de  $f$ ; es decir, cuando la probabilidad de favorecer al elemento con menor riqueza es grande.

La Figura 3.10 muestra el comportamiento de  $G$  (panel izquierdo) y  $A$  (panel derecho) en función de  $k$  con  $u$  fijo.

Observamos que para valores de  $u$  pequeños,  $G$  se incrementa al aumentar el

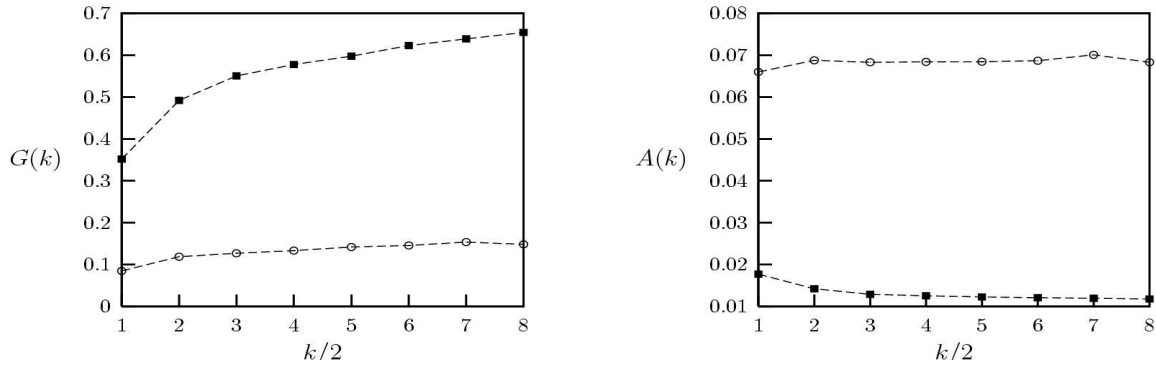


Figura 3.10: *Panel izquierdo: Coeficiente de Gini ( $G$ ) en función de  $k$  para  $f = 0,5$ ,  $u = 1$  (cuadrados) y  $u = 10$  (círculos). Panel derecho: Actividad de sistema ( $A$ ) en función de  $k$  para  $f = 0,5$ ,  $u = 1$  (cuadrados) y  $u = 10$  (círculos).*

número de vecinos  $k$ , tendiendo al valor asintótico de  $G$  correspondiente al caso de acoplamiento global considerado en el modelo de Laguna *et al.* Sin embargo, el coeficiente de Gini  $G$  se mantiene pequeño y aproximadamente constante para valores grandes de  $u$  si  $f$  es grande. Por el contrario, la actividad  $A$  se mantiene prácticamente constante y grande para valores de  $f$  y  $u$  grandes.

La Figura 3.11 muestra la distribución de riqueza del sistema para diferentes valores de  $u$  con  $f = 0,5$  y  $k = 2$ . Nótese la persistencia del efecto de la desaparición de la clase media para  $u$  pequeño, mientras que éste efecto desaparece para valores de  $u$  grandes.

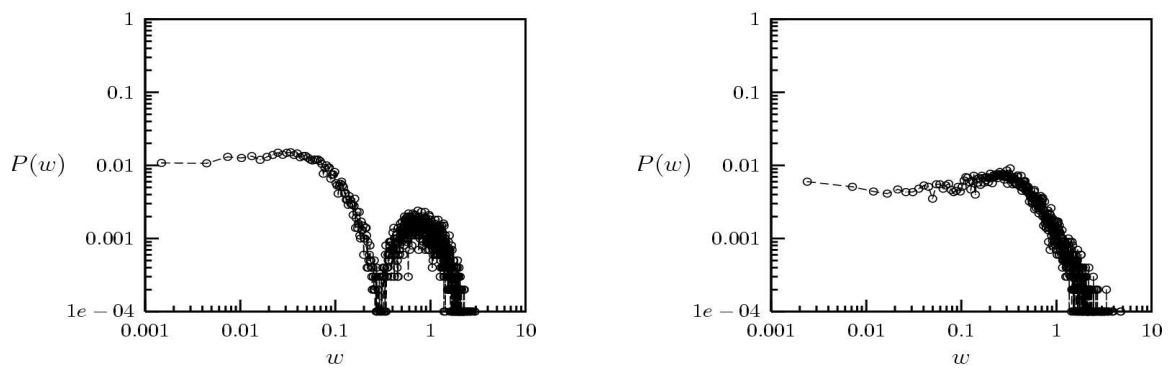


Figura 3.11: *Distribuciones de riqueza para  $k = 2$  y  $f = 0,5$ , con  $u = 0,3$  (panel izquierdo) y  $u = 10$  (panel derecho).*

*Economics desperately needs Econophysics*

Steve Keen

*Econophysics will displace Economics in both  
the universities and boardrooms...*

J.L. McCauley

## Conclusiones

En esta tesis hemos desarrollado un modelo de intercambio económico en una sociedad estratificada, donde los elementos están ubicados en una red y poseen interacciones con sus vecinos. La inclusión de relaciones espaciales o topología de conectividad entre los elementos permite definir una dinámica espaciotemporal. En tal sentido, una de las contribuciones más relevantes del presente trabajo ha sido la aplicación de varias herramientas y conceptos provenientes del estudio de sistemas dinámicos a la caracterización de los patrones espaciotemporales que emergen como consecuencia de reglas de intercambio económico en un sistema.

Nos hemos enfocado en un modelo de intercambio económico con ingredientes básicos, como son la riqueza de los agentes, la aversión al riesgo, la probabilidad de favorecer al elemento con menor riqueza en una transacción, un umbral de interacción y el tamaño de la vecindad de interacción. Hemos encontrado que la topología de conectividad juega un papel relevante en las propiedades colectivas del modelo económico. Hemos introducido los conceptos de actividad y recesión para caracterizar el comportamiento del sistema. Igualmente, hemos empleado el coeficiente de Gini, que usualmente se considera en economía, como un parámetro de orden para caracterizar las transiciones de comportamiento del sistema.

En primer lugar hemos descubierto la existencia de dos fases dinámicas del sis-

tema en diferentes regiones de parámetros, en analogía a fases comúnmente encontradas en sistemas caóticos espaciotemporales: una fase laminar, caracterizada por una actividad nula, y una fase turbulenta, correspondiente a una actividad distinta de cero. Hemos podido visualizar estas fases para una red unidimensional.

El rol de la topología ha quedado establecido al incrementar el número de elementos en la vecindad  $k$ . El coeficiente de Gini aumenta cuando se incrementa  $k$ , tendiendo al valor asintótico de  $G$  en el caso de acoplamiento global ( $k$  muy grande). Para valores pequeños de  $k$ , los valores del coeficiente de Gini son comparables a los valores reales reportados para los países del mundo. Por el contrario, los valores de  $G$  obtenidos con acoplamiento global son, en general, mayores que los observados. Esto sugiere que en el mundo económico real ocurren interacciones locales, posiblemente coexistiendo con interacciones de largo alcance.

La inclusión de la topología en este modelo de intercambio económico produce desviaciones de leyes de potencia (ley de Pareto), tales como aquellas frecuentemente encontradas en la distribución de riqueza para los rangos de riqueza alta. Esto sugiere que la ley de Pareto está asociada a interacciones de largo alcance, en las cuales los elementos con mayor riqueza tengan mayor probabilidad de interactuar.

Hemos establecido que el efecto de la desaparición de la clase media está determinado por la probabilidad  $f$  de favorecer a los agentes de menor riqueza, tal como también fué observado por Laguna *et al.*, así como por el rango de interacción (expresado por  $k$ ) incluido en nuestro modelo.

Una ventaja de considerar modelos simples como el que hemos presentado, además de su eficiencia computacional, es la posibilidad de incluir diversas extensiones con relativa facilidad. En tal sentido sería muy interesante estudiar esta dinámica económica en redes complejas, tales como redes de pequeño mundo y redes libre de escala, las cuales son ubícuas en sistemas sociales reales. Otra extensión de mucho interés actual sería la consideración de redes adaptativas, es decir, donde la dinámica de interacción económica y la topología de conectividad estén acopladas.

Nuestro trabajo es un ejemplo de que la Física puede aportar conceptos y herramientas valiosas para modelar algunos aspectos de la dinámica social. El auge experimentado actualmente por disciplinas tales como la Sociofísica y la Econofísica

demuestra que la búsqueda de los conceptos universales que ha caracterizado históricamente a la Física se ha extendido a dominios anteriormente considerados fuera del alcance de esta ciencia.

# Apéndice A

## Apéndice

Índice de Gini por países.









# Bibliografía

- [1] Philip Ball, “Culture Crash”, *Nature*, Vol 441, 8 June 2006.
- [2] R.N. Mantegna, H.E. Stanley, “An Introduction to Econophysics: Correlation and Complexity in Finance”, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] J.L. McCauley, “Dynamics of Markets: Econophysics and Finance”, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] S. Pianegonda, J.R. Iglesias, G. Abramson, J.L. Vega, “Wealth distribution with conservative exchanges”, *Physica A* 322 (2003).
- [5] J.R. Iglesias, S. Goncalves, S. Pianegonda, J.L. Vega, G. Abramson, “Wealth distribution in our small world”, *Physica A* 327 (2003).
- [6] A. Das, S. Yarlagadda, “Analytic treatment of a trading market model”, (<http://arXiv.org/abs/cond-mat/0304685>); *Physica Scripta* T106 (2003) 39.
- [7] A. Chakraborti, “Distributions of money in model markets of economy”, (<http://arXiv.org/abs/cond-mat/0205221>)
- [8] A. Chatterjee, B.K. Chakrabarti, S.S Manna, “Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity”, *Physica A* 335 (2004) 155-163
- [9] F. Slanina, “Inelastically scattering particles and wealth distribution in an open economy”, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 46102.
- [10] M. Patriarca, A Chakrabarti, K. Kaski, “Gibbs versus non-Gibbs distributions in money dynamics”, *Physica A* 340 (2004) 334-339.

- [11] P. Manolova, C. Lai Tong, Ch. Deissenberg, “Money and exchange in an economy with spatially differentiated agents”, *Physica A* 324 (2003) 445-453.
- [12] P. Manolova, C. Lai Tong, Ch. Deissenberg, “Real taxation and production in a monetary economy with spatially differentiated agents”, *Appl. Math. Comput.* 164 (2005) 591-603.
- [13] N. Scafetta, S. Picozzi, B.J. West, “An out-of-equilibrium model of the distribution of wealth”, (<http://arXiv.org.abs/cond-mat/0403045>).
- [14] M.F. Laguna, Guillermo Abramson, Damián H. Zanette, “Vector opinion dynamics in a model for social influence”, *Physics A* 329 (2003) 459-472.
- [15] M.F. Laguna, S. Risau Gusman, J.R. Iglesias, “Economic exchanges in a stratified society: End of the middle class?”, *Physica A* (2005) 107-113.
- [16] P. Repetowicz, S. Hutzler, P. Richmond, “Dynamics of money and income distribution”, *Physica A* 356 (2005) 641-654.
- [17] P. Richmond, P. Repetowicz, S. Hutzler, E. Ni Dhinn, “Agent based approaches to income distributions and the impact of memory, in: M. Ausloos, M. Dirickx (Eds.), “The logistic map and the route to chaos”, Springer Complexity, Berlin, 2006, pp. 259-271.
- [18] G. Corso, L. S. Lucena, Z. D. Thomé, “The small-world of economy: a speculative proposal”, *Physica A* 324 (2003) 430-436.
- [19] [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_countries\\_by\\_income\\_equality](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_income_equality)
- [20] M. Rodríguez-Achach, R Huerta-Quintanilla, “The distribution of wealth in the presence of altruism in simple economic models”, *Physica A* 361 (2006) 309-318.
- [21] Junji Ito and Kunihiro Kaneko, “Spontaneous Structure Formation in a Network of Chaotic Units with Variable Connection Strengths”, *Phys. Rev. Lett.* 88, 028701 (2002).

[22] H. Chaté, P. Manneville, “Spatio-temporal intermittency in coupled map lattices”, *Physica D* **32**, 402 (1988).

[23] [http://en.wikipedia.org/wiki/Gini\\_index](http://en.wikipedia.org/wiki/Gini_index)