

Universidad de Los Andes
Centro de Física Fundamental
Area de Caos y Sistemas Complejos

**Modelo dinámico de la influencia del entorno
en redes sociales de pequeño mundo**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre
Universidad de Los Andes
como requisito parcial para optar al Título de:
Licenciado en Física

Presentado por:
Br. José L. Herrera D.

Tutor: **Dr. Mario Cosenza**

Mérida, Enero del 2005

A mis dos mujeres favoritas de las tres que existen en el mundo,

Mi amor, apoyo, mi complemento...

Thayna

Mi motivo, mi princesa...

Darelle

This will be an eye-opening trip across disciplines that I hope will challenge you to step out of the box of reductionism and explore, link by link, the next scientific revolution: the new science of networks.

Albert barabasi, Linked, the new science of networks.

Agradecimientos

A través de los años y de los lugares, me he visto rodeado de personas, unas más amigables que otras, quienes queriendo o sin querer me brindaron una ayuda importantísima acerca de la vida misma. A todas esas personas que en algún momento de mi existencia se cruzaron en mi camino les doy las gracias. Primeramente, gracias a Dios, quien por su infinita sabiduría me puso en los caminos de todas las personas a las que me refiero, quien promete en Su palabra que si el hombre cayere no quedará tendido porque Jehová sostiene su mano (Sal 37:24). Así, a través de las victorias y fracasos, he podido llegar a ser quien soy en este momento, estando concluyendo con estas líneas una de las etapas más importantes de la mi vida.

A mi tutor, el Dr. Mario Cosenza, quien con su paciencia, apoyo y ánimo me condujo por los caminos, a veces tenebrosos, de los sistemas complejos; haciendo de esta experiencia no sólo agradable, sino también una que ha marcado la pauta en mi formación como profesional.

El carácter y la perseverancia que hoy me define se lo debo en gran parte a mis abuelos, quienes fueron mis padres durante mucho tiempo; quienes me enseñaron que para tener las cosas hay que trabajar que; mientras mas luchas por conseguir algo, más lo amas una vez que lo tienes; a mis viejitos quisiera, no sólo agradecerles, sino también dedicarles este trabajo y momento. A mis padres, por su ayuda y su apoyo durante el transcurso de mi carrera.

Desde los primeros días de mi juventud fui anhelando la fortaleza de una familia, su seguridad y su apoyo y, aunque sólo llevamos un año y medio de casados, mi amada esposa me ha brindado todo el apoyo que alguien pueda recibir. Sus palabras de aliento, sus oraciones que en momentos de debilidad me dieron fortaleza. Ella

que es esa ayuda idónea enviada por Dios para complementar mi vida; a mi amada Thayna quiero dar gracias por soportarme y entenderme, y por estar conmigo en este momento tan especial de mi vida.

Quien con su llegada ha iluminado mi vida, quien ha cambiado totalmente la manera en que veo las cosas, quien con sus miradas y su llanto hace que mi corazón se me ponga más pequeño, quien hoy por hoy es el impulso mayor que tengo para superarme, a mi amada Darelle, mi hija.

Definitivamente, ya se oye decir en muchos lugares, todo en la vida son las conexiones. Dios me dió la oportunidad de conocer a gente tan amable y tan dada a ayudar como lo son mis profesores y compañeros. A los Profesores Antonio Parravano y Kay Tucci quienes con sus múltiples ideas y preguntas, además de su valiosísima experiencia, me permitieron reforzar mi confianza y afianzar mis conocimientos en el tema.

Los siempre oportunos compañeros caóticos, Miguel Angel, Juan Carlos, Carlitos, José Manuel, Javier, Orlando, Hender y Luz Marina. A ellos les debo el conocimiento que han compartido conmigo en esta etapa de mi vida; con sus consejos he llegado a, como dice Barabasi en su libro *Linked, think network*.

A toda mi familia quienes también con sus oraciones me han ayudado muchísimo.

A todos, muchas gracias. Sólo puedo retribuir todo lo que han compartido conmigo dándoles lo poco que me ha sido dado, y orando por ustedes para que, así como yo lo estoy haciendo en este momento, también todos ustedes puedan alcanzar sus sueños.

Índice general

Introducción	1
1. Redes de Pequeño Mundo.	4
1.1. Definiciones.	6
1.1.1. Coeficiente de Agrupamiento.	6
1.1.2. Longitud Característica.	7
1.2. El Modelo de Watts-Strogatz.	8
1.3. Otros Modelos.	10
1.4. Ubiquidad de las Redes de Pequeño Mundo.	12
2. Modelo de influencia cultural de Axelrod.	18
2.1. El Modelo de Axelrod de influencia social.	18
2.1.1. Formulación matemática.	19
2.1.2. Dinámica de Interacción.	20
2.1.3. Transición de fase en el modelo de Axelrod.	22
3. Influencia del estado cultural predominante (Moda).	25
3.1. Nuestro modelo de red de pequeño mundo.	26
3.2. Modelo de influencia cultural predominante del entorno o “Moda”. . .	30
3.2.1. Obtención del vector Moda.	31
3.2.2. Dinámica de interacción con el vector moda.	33
3.3. Resultados del modelo con influencia del entorno (Moda).	34

Conclusiones	38
Bibliografía	41

*Pero su fama se extendia más y más;
y se reunía mucha gente para oírle,
y para que les sanase de sus enfermedades.*

Lucas 5:15

Introducción

En años recientes se ha visto un interés creciente, dentro de la comunidad científica, en el estudio de redes complejas. Este interés, junto con el crecimiento abismal de las herramientas computacionales ha permitido responder (al menos de forma general) preguntas fundamentales sobre la formación de estructuras en sistemas sociales, económicos, biológicos, artificiales, entre otros; que otrora eran imposibles de responder debido a la inherente complejidad de los mismos.

Con la ayuda de estas herramientas, una nueva ventana de conocimiento ha sido abierta y, de esta manera, campos vírgenes se han puesto de manifiesto para sembrar una nueva rama del conocimiento como lo es el estudio de los sistemas complejos. Trabajos recientes [1, 2, 3, 5, 6] han mostrado que los sistemas ya mencionados, y muchos otros más, comparten características universales.

El presente trabajo se enfoca en el estudio de dinámica de redes sociales. Los antecedentes de estos estudios nos trasladan a los años 50, en el momento en que los famosos matemáticos P. Erdos y A. Renyi propusieron su visión acerca de la topología de redes sociales. Ellos introdujeron la idea de que las conexiones sociales se realizaban en forma aleatoria entre los individuos de una sociedad. En la actualidad sabemos que esta idea simplemente no puede ser correcta ya que, si fuera de esta manera, significaría que mi viaje desde el Perú en 1992 fue decidido en forma

aleatoria, además que mi escogencia de estudiar Física también lo fue, es más que mi preferencia del estudio de sistemas complejos también fue aleatoria, así como la escogencia de mi esposa. Sin embargo, sabemos que nuestras conexiones o decisiones no se realizan en forma aleatoria, sino teniendo como impulso el suplir alguna necesidad o alcanzar algún propósito. Así, tenemos evidencia de que, efectivamente, nuestra sociedad no presenta conectividad aleatoria.

Esta idea, a pesar de parecer bastante obvia, pasó desapercibida por más de 40 años.

Duncan Watts, estudiante de doctorado en la Universidad de Cornell a finales de los 90s, trabajaba en la sincronización del chirrido de los grillos y profundizaba en este tema. Al hacerlo, se vio cada vez más alejado del chirrido y fue inclinándose cada vez más hacia la pregunta, ¿cómo está formada la red de interacciones de los grillos o de las personas?. Así, el estudio de la sincronización lo llevó al estudio de redes sociales, observando que éstas no son del todo aleatorias.

En principio, las redes sociales muestran dos características importantes. Primero, en estas, la **distancia promedio** entre dos personas cualesquiera es muy pequeña comparada con el tamaño de la población mundial (más de 6 mil millones). Segundo, en la sociedad se forman grupos íntimos de personas. Esto quiere decir que, por lo general, en un grupo de conocidos de una persona dada las personas de ese grupo también se conocen entre sí.

En las redes aleatorias, a pesar de poseer una distancia promedio entre personas pequeña, la probabilidad de que se formen grupos íntimos es del orden de k/N , siendo k el número promedio de conocidos de una persona y N el tamaño del sistema. Por lo tanto, considerar una red social como aleatoria no es una buena aproximación, ya que a pesar de que ambas redes poseen distancias medias pequeñas, las redes sociales poseen un alto grado de **agrupamiento**, característica que no existe en las redes aleatorias.

Tomando en consideración estos hechos, Watts y Strogatz [6] propusieron un modelo más realista para la descripción de las redes sociales, introduciendo la noción de las redes **pequeño mundo** las cuales se describen en el Capítulo 1.

Además del interés sobre la forma o topología de las redes sociales, un campo

interesante de explorar es la evolución de los sistemas sociales o cómo se forman estructuras dentro de la sociedad, considerada como un sistema dinámico. Este es uno de los problemas fundamentales de la ciencia emergente llamada Sociofísica, dentro de la cual se enmarca el presente trabajo.

En este contexto, el destacado sociólogo Robert Axelrod propuso su ahora famoso modelo de **diseminación cultural** [12], en el cual, partiendo de ideas muy simples intenta responder, en forma general, cuáles son los factores determinantes que permiten la emergencia de diversidad cultural en una sociedad. Este modelo se revisa en el Capítulo 2.

En este trabajo se ha desarrollado un algoritmo general para la construcción de redes de pequeño mundo, el cual puede ser aplicable a redes en dos y más dimensiones, y se presenta en el Capítulo 3.

Nuestra contribución principal en esta tesis consiste en la fusión de la idea de redes sociales de pequeño mundo de Watts y Strogatz con la dinámica cultural del modelo de Axelrod. Adicionalmente, hemos investigado cuál es la influencia que tiene el entorno local, o la vecindad de los elementos, sobre el comportamiento de una red social tipo pequeño mundo. Para ello, en el Capítulo 3 hemos introducido cuantitativamente el novedoso concepto de **moda** en un sistema social.

Denominamos moda a la cultura predominante en el entorno de un elemento en una red social, refiriéndonos a cultura en el contexto del modelo de Axelrod. En el Capítulo 3 hemos estudiado el efecto que la moda tiene sobre el surgimiento de diversidad cultural en redes de pequeño mundo.

Por último, los resultados e implicaciones de este trabajo se discuten en las Conclusiones.

Un nexo de rivalidad, celos y gotas de sangre, una red de estribaciones múltiples que podrían llevarse hasta el infinito y que ya no queremos denominar en la lengua aunque sí la concebimos con el pensamiento y los hechos, un fastidioso recordatorio, los conyacentes o cofolladores...

Javier Marías, Mañana en la batalla piensa en mí.

Capítulo 1

Redes de Pequeño Mundo.

Preguntar qué tan lejos se encuentran dos personas ubicadas, por ejemplo, una en Venezuela y otra en Kenya, podría resultar algo bastante obvio de responder, “se encuentran muy lejos”. Sin embargo a pesar de que vivimos en un mundo bastante grande y con más de 6 mil millones de personas dispersas por todas partes, con frecuencia escuchamos una frase muy especial: *qué pequeño es el mundo*.

Investigaciones recientes sobre el estudio de redes complejas han demostrado efectivamente, que el mundo de las relaciones humanas se puede modelar como una red que, a pesar del gran número de nodos (los habitantes de la tierra) y de la separación entre ellos (bastante grande en algunos casos), muestra evidencias de ser un mundo pequeño. Este tipo de red se conoce como “Red de Pequeño Mundo” o *Small World Network*.

El concepto de *Small World Network* (SWN) describe el hecho de que a pesar del gran tamaño de las diversas redes que nos rodean (redes sociales, internet, redes ecológicas, etc), en la mayoría de ellas existe un camino relativamente corto entre

cualesquiera dos nodos que la conforman. La manifestación más popular de SWN es el concepto de "Seis grados de separación", descubierto por el psicólogo social Stanley Milgram quien realizó el siguiente experimento en 1967 [1]:

- a) Distribuyó, de forma aleatoria, cierto número de cartas dirigidas a un corredor de bolsa en Boston, Massachusetts, a un grupo de personas en Nebraska .
- b) Las instrucciones eran que las cartas debían llegar a su destino (el corredor de bolsa en Boston) pasándolas de persona a persona a través de una cadena de individuos, los cuales deberían conocerce, por lo menos, por el primer nombre. Debido a que no era muy probable que los receptores iniciales conocieran directamente al corredor de bolsa en Boston, la mejor estrategia era pasar la carta a alguien que, según ellos, era la persona más adecuada para la tarea o que se encontrara más cerca, socialmente, del corredor de bolsa. Por ejemplo, alguien que ellos conocieran en la industria financiera o algún amigo en Massachusetts. La situación se ilustra en la Figura 1.1



Figura 1.1: *Esquema del experimento de Milgram. La separación entre Nebraska y Boston es de aproximadamente 1800 Km.*

Eventualmente, un número apreciable de cartas llegó a su destino, y Milgram observó que a éstas sólo les había tomado un promedio de seis pasos para llegar desde Nebraska hasta Boston. Este experimento y otros posteriores [1] demostraron que la separación típica entre dos personas tomadas al azar en los Estados Unidos es alrededor de seis conocidos intermedios.

Este fenómeno no es solamente una casualidad de un país en particular, o de algunas redes, sino que resulta una propiedad genérica de muchas redes que encontramos en la naturaleza. Estas redes pueden estar formadas por personas, en donde las conexiones se pueden representar de diferentes maneras, por ejemplo, contactos sexuales, de amistad, de trabajo, etc; proteínas en una célula, que se conectan a través de interacciones químicas; y muchas otras las cuales serán mencionadas en las siguientes secciones.

Para entender mejor este fenómeno y su ocurrencia en las diversas redes reales, hace falta introducir dos definiciones importantes que son el *Coefficiente de agrupamiento (Clustering)* y la *Longitud Característica (Characteristic path Length)* de una red.

1.1. Definiciones.

Considere una red regular unidimensional con condiciones de borde periódicas con $k = 4$, donde k es el número de vecinos de cada nodo, y $N = 20$, donde N es el número de elementos o nodos de la red; tal como se muestra en la Figura 1.2.

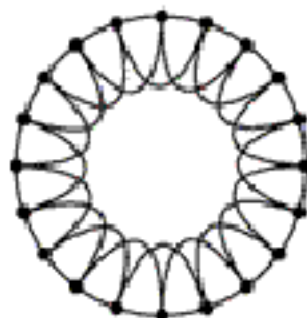


Figura 1.2: Red regular unidimensional. $k = 4$. $N = 20$

1.1.1. Coeficiente de Agrupamiento.

Para cada nodo i de la red, el coeficiente de agrupamiento C_i viene dado como el cociente entre las conexiones existentes E_i entre sus k_i vecinos y el número total de

posibles conexiones entre estos, el cual es $k_i(k_i - 1)/2$ [2]. Entonces, el coeficiente de agrupamiento C de la red se define como el promedio del coeficiente de agrupamiento de todos los nodos que la conforman

$$C = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)} \right\rangle_i. \quad (1.1)$$

Una red se encuentra altamente agrupada si el nodo A tiene como vecino al nodo B , y si el nodo B tiene como vecino al nodo C , entonces existe una alta probabilidad de que el nodo A y el nodo C también sean vecinos. Esta es una propiedad que los sociólogos llaman “transitividad” [3].

En otras palabras el coeficiente de agrupamiento nos dice en qué grado los vecinos k_i del nodo i son vecinos entre sí.

1.1.2. Longitud Característica.

La longitud característica de la red se define como la distancia media mas corta que conecta a dos nodos cualesquiera de la red. El promedio de las distancias al nodo i es

$$L_v(i) = \langle L_{\min}(i, j) \rangle, \quad (1.2)$$

donde $L_{\min}(i, j)$ representa la distancia más corta desde el nodo i al nodo j . Aquí la distancia se define como el número de conexiones entre dos nodos. Así, la longitud característica de la red es

$$L = \langle L_v(i) \rangle, \quad (1.3)$$

promediada para todos los i . Estas definiciones también son válidas para el caso más general de una red n -dimensional.

La red que llamaremos de pequeño mundo es aquella en la que su coeficiente de agrupamiento es alto en comparación con el de una red aleatoria, además de tener una longitud característica corta comparada con aquella de una red regular, como lo veremos en la siguiente sección.

1.2. El Modelo de Watts-Strogatz.

Mientras D. Watts realizaba sus estudios de PhD bajo la supervisión de S. Strogatz, su atención fue desviada desde el estudio de la sincronización del sonido emitido por los grillos a una incursión repentina en redes sociales [4]. En este punto su objetivo era responder la siguiente pregunta: *¿Que tan probable es que dos de mis amigos sean amigos entre sí?*. Para esto, Watts y Strogatz propusieron un modelo de una red social que dependía de un solo parámetro al cual llamaron “probabilidad de reconexión p ”. Este modelo es una interpolación entre una red regular y una red aleatoria. El algoritmo detrás de este modelo es el siguiente [5]

- (i) *Empezar con orden*: Se comienza con una red unidimensional con condiciones de frontera periódicas con N nodos, en el que cada nodo está conectado a sus primeros k vecinos ($k/2$ en cada lado). Para asegurar que la red esté dispersa, pero conectada, se considera $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$.
- (ii) *Se introduce aleatoriedad*: Aleatoriamente se recablea cada conexión de la red con probabilidad p . Esto se realiza de tal manera que no se permitan conexiones dobles entre dos nodos o que algún nodo realice una autoconexión. Este proceso introduce $pNk/2$ conexiones de largo alcance que enlazan dos nodos que de otra manera formarían parte de vecindades diferentes.

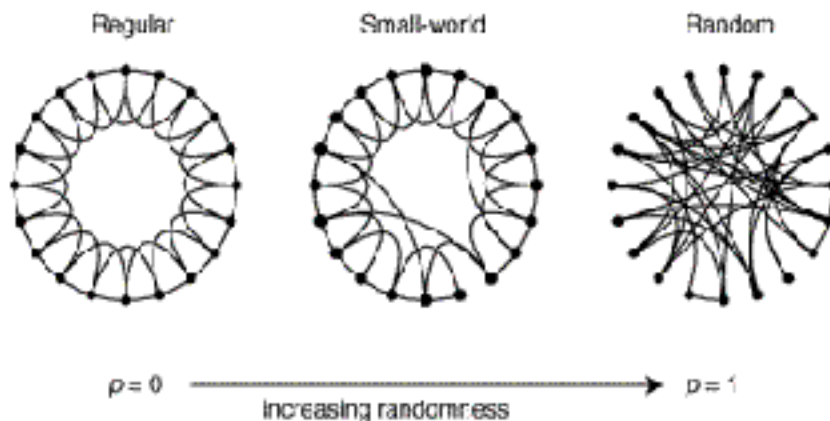


Figura 1.3: Representación esquemática del modelo de Watts y Strogatz.

Al variar el parámetro p se puede monitorear muy detalladamente la transición entre orden completo en la red ($p = 0$) y desorden o completa aleatoriedad ($p = 1$). La Figura 1.3 representa esquemáticamente el modelo de Watts y Strogatz.

El coeficiente de agrupamiento $C(p)$ y la longitud característica $L(p)$ se pueden calcular en función del parámetro p . Al estudiar el coeficiente de agrupamiento y la longitud característica para una red unidimensional ordenada, con $p = 0$ se observa que el coeficiente de agrupamiento es del orden de $C(0) \approx 3/4$, y la longitud característica es del orden de $L(0) \approx N/2k \gg 1$. Cuando $p \rightarrow 1$ la red tiende a una red aleatoria para la cual $L(1) \sim \ln(N)/\ln(k)$ y $C(1) \sim k/N$.

Estos casos límites podrían sugerir que un coeficiente de agrupamiento alto está asociado con una longitud característica alta, y que un coeficiente de agrupamiento bajo está asociado con una longitud característica baja. Sin embargo, Watts y Strogatz encontraron un rango de valores del parámetro p en el cual $L(p) \approx L(1)$ a la vez que $C(p) \approx C(0)$.

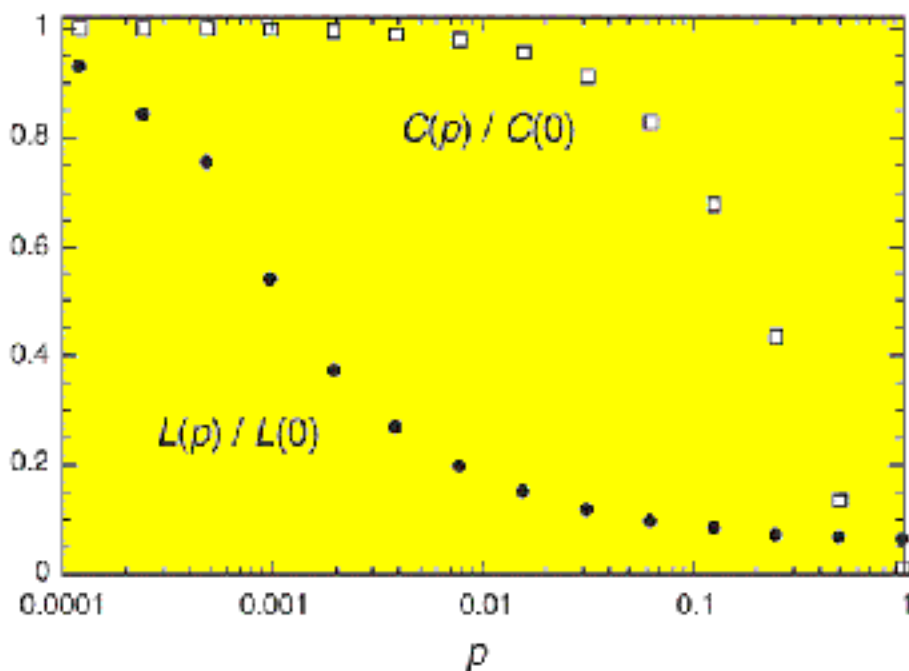


Figura 1.4: Longitud Característica $L(p)$ y Coeficiente de Agrupamiento $C(p)$ en función de la probabilidad de reconexión p . $k = 4$, $N = 20$.

La Figura 1.4 muestra la longitud característica y el coeficiente de agrupamiento en función de la probabilidad de reconexión p para el modelo de Watts y Strogatz.

Se observa un intervalo donde ocurre una caída rápida en los valores de $L(p)$, mientras que $C(p)$ permanece casi constante; dando lugar a redes con un coeficiente de agrupamiento alto, pero con longitud característica pequeña. Esta coexistencia de L pequeño y C alto es una característica observada en muchas redes reales como las mencionadas anteriormente.

Este modelo tiene sus raíces en los sistemas sociales en donde la mayoría de las personas son amigos de sus vecinos inmediatos (vecinos en la misma calle, colegas, personas que sus amigos les presentan). Sin embargo, todos tenemos amigos que se encuentran lejos de nosotros (personas en otros países, viejos conocidos), los cuales son representados por las conexiones de largo alcance en el modelo de Watts-Strogatz.

1.3. Otros Modelos.

Además del modelo de Watts y Strogatz, existen otros modelos de redes que permiten observar el efecto de pequeño mundo. Entre ellas podemos encontrar

(a) *Modelo de Newman-Watts* [1]. Se añaden conexiones entre pares de nodos escogidos al azar, en vez de realizar reconexiones. Aquí es imposible que alguna región o nodo de la red quede desconectada del resto de la misma, lo cual podría ocurrir en el modelo original de Watts-Strogatz, aunque es muy poco probable que esto suceda. El comportamiento de esta red es similar al del modelo de Watts y Strogatz. Véase la Figura 1.5.

(b) *Modelo de Kasturirangan* [1]. El fenómeno de “pequeño mundo” emerge debido a que existen algunos nodos en la red que tienen una cantidad de vecinos mayor que los demás elementos de la red, o que están conectados a vecindades lejanas. Comenzando con una red regular unidimensional con condiciones de frontera periódicas, se introducen cierta cantidad de nodos extras en el centro de la misma, que se conectan a un gran número de nodos de la red principal, escogidos al azar. Este modelo es similar al de Watts-Strogatz en cuanto los nodos extras introducen

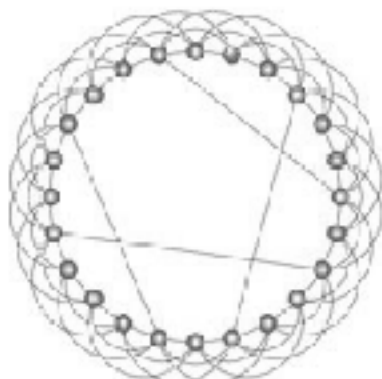


Figura 1.5: *Modelo de Newman-Watts*

los “atajos” entre nodos lejanos de la red principal. Figura 1.6.

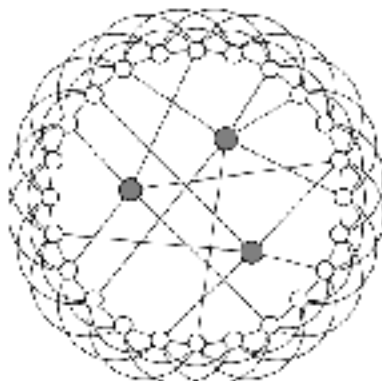


Figura 1.6: *Modelo de Kasturirangan*.

(c) *Modelo de Kleinberg* [1]. Kleinberg propuso un modelo basado en una red cuadrada de dos dimensiones (aunque el modelo puede ser extendido a más dimensiones de forma directa) donde se añaden atajos o conexiones entre pares de nodos i y j con una probabilidad que decrece como una ley de potencia de la distancia entre ellos, d_{ij}^{-r} . Es posible que dicha red reproduzca las interacciones sociales con mayor exactitud que el modelo original de Watts y Strogatz, aunque las propiedades de ambos modelos son bastante similares en lo que al coeficiente de agrupamiento y la longitud característica se refiere. Sin embargo, existe un punto importante en el que este modelo muestra un comportamiento interesante: para valores del exponente $r = 2$, existe un algoritmo simple para encontrar un camino corto entre dos nodos dados haciendo uso solamente de información local acerca de la estructura de

la red. Para cualquier otro valor de r , el problema de encontrar un camino corto es probablemente mucho más complicado. Este resultado podría tener aplicaciones en el diseño de redes artificiales en las cuales encontrar un camino corto sea importante.

En este trabajo hemos desarrollado un algoritmo alternativo para la construcción de redes de pequeño mundo, el cual se presenta en el Capítulo 3. Las propiedades estadísticas de nuestro modelo de redes de pequeño mundo son similares a las del modelo original de Watts y Strogatz.

1.4. Ubiquidad de las Redes de Pequeño Mundo.

Gracias al gran interés generado por el descubrimiento sorprendente de Watts y Strogatz, muchas redes naturales y artificiales han sido estudiadas en detalle por la comunidad científica. A continuación se mencionan algunos ejemplos.

- i) **Caenorhabditis elegans** [6]. Este gusano de impronunciable nombre es famoso por su estructura neuronal simple, la cual consta solamente de 282 neuronas. El mapa neuronal del *C. elegans* ha sido totalmente trazado, lo cual a permitido el estudio cuantitativo de su estructura, mostrada en la Figura 1.7. El coeficiente de agrupamiento y la longitud característica de la estructura neuronal del *C. elegans* se muestran en la tabla 1.1.

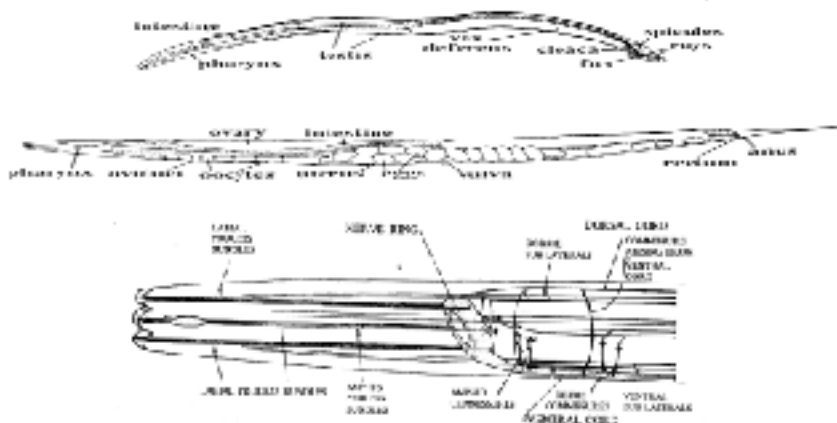


Figura 1.7: Representación esquemática del *C. elegans*. $N = 282$.

- ii) **Descomposición en factores primos** [7]. Se construye una red de n nodos donde cada nodo representa un número natural de 2 a n . Luego se sigue el siguiente algoritmo. Se toma el nodo i y se compara con cada nodo j . Si existe un divisor común entre el nodo i y el nodo j , se añade una conexión entre ellos, tal como se muestra en la Figura 1.8.



Figura 1.8: *Red de números naturales con $N = 16$. Estos están conectados de acuerdo a la descomposición de números primos.*

- iii) **Red de contacto sexual** [8]. Esta es una red social en la que las conexiones se establecen entre individuos que han tenido contacto sexual. Un estudio de este tipo de red se realizó con datos recolectados en una encuesta sobre el comportamiento sexual en Suecia en 1996 [8]. Este estudio involucró a 4781 personas de ambos sexos entre 18 - 74 años, las cuales respondieron entrevistas personales y cuestionarios. De las personas entrevistadas, sólo 2810 respondieron. Este estudio reveló la presencia del fenómeno de pequeño mundo en redes sociales. La Figura 1.9 representa esquemáticamente una red de contacto sexual.
- iv) **World Wide Web** [9]. Además de sistemas naturales, muchos sistemas creados por el hombre también presentan características de pequeño mundo. La Figura 1.10 muestra esquemáticamente la estructura de Internet alrededor del mundo. La red de todas las computadoras conectadas vía Internet y la red de vínculos de paginas Web muestran longitudes características muy pequeñas comparadas con el número de máquinas o de páginas Web, así como también coeficientes de agrupamiento bastante altos. Mediante un ingenioso algoritmo

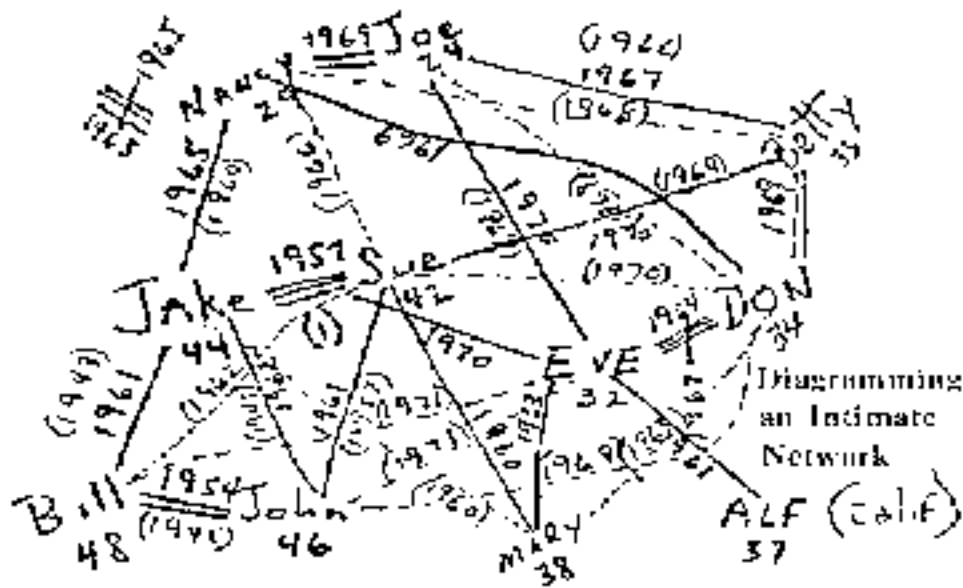


Figura 1.9: Diagrama esquemático de una red de contacto sexual.

(robot), el grupo de A. Barabási en la Universidad de Notre Dame (U.S.A.) logró reproducir la estructura de un fragmento de la Web para el año 1999, conformada entonces por unas 800 millones de páginas. La longitud característica fué de aproximadamente 19, y además el coeficiente de agrupamiento resultante es bastante alto comparado con una red aleatoria del mismo tamaño.

- v) **Número de Erdős** [10]. Jerry Grossman, profesor de la Universidad de Oakland, ha creado una base de datos científica en la cual, cada matemático, o cualquier otro científico, puede encontrar su número de Erdős, es decir, que distancia lo separa de este famoso matemático. Esta es una red que permite el estudio de la red de colaboraciones científicas. Aunque Erdős fue matemático, los nodos que conforman esta red no son sólo investigadores de esta área. En esta red Erdős tiene un número de Erdős de 0. Los científicos que realizaron un artículo en conjunto con Erdős tienen un número de Erdős de 1. Así, los que escribieron un artículo con alguien que haya publicado un artículo con

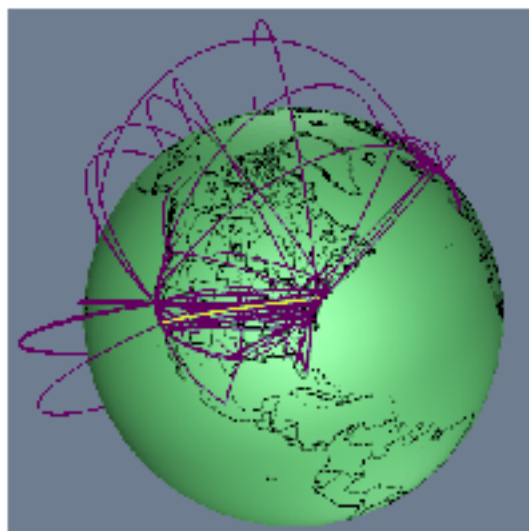


Figura 1.10: *Conexiones de Internet alrededor del mundo.*

Erdős tienen un número de Erdős de 2, y así sucesivamente. En esta red de colaboración de investigaciones científicas se encuentra presente el fenómeno de pequeño mundo. Aunque está constituida por aproximadamente 401000 nodos (autores), la longitud característica de la red es $L \approx 8$, y su coeficiente de agrupamiento es de $C \approx 0,14$. Un ejemplo del efecto pequeño mundo en esta red lo constituye el Dr. Mario Cosenza, quien tiene un número de Erdős 4. Los enlaces que conectan al Dr. Cosenza con Erdős son:

Erdős, P.; Kac, M., Amer. J. Math. 62, (1940), 738.

Gaveau, B.; Jacobson, T.; Kac, M; Schulman, L. S., Phys. Rev. Lett. 53 (1984), 419.

Gaveau, B.; Hynes, J. T.; Kapral, R.; Moreau, Michel, J., Statist. Phys. 56 (1989), 879.

Cosenza, Mario G.; Kapral, Raymond, Phys. Rev. A, 46 (1992), 1850.

- vi) **Número de Ruth.** [11]. Otra red social donde se manifiesta el fenómeno de pequeño mundo es la red de jugadores de baseball. Aquí, los aficionados al baseball pueden encontrar el número de Ruth de cualquier otro jugador; es decir, el número de conexiones que separan a cualquier jugador del famoso Babe

Ruth. En esta red, también se puede calcular la distancia existente entre dos jugadores cualesquiera de baseball. Esta es una red conformada por aproximadamente 17000 jugadores y aunque no se encuentran datos estadísticos acerca de la misma, se observa que, efectivamente, la longitud característica es pequeña. Se puede encontrar que el número de Ruth del jugador venezolano Omar Vizquel es 5 a través de las siguientes conexiones:

Babe Ruth jugó con Leo Durocher en los Yankees de New York en 1925. Leo Durocher jugó con Erv Palica para los Dodgers de Brooklyn en 1945. Erv Palica jugó con Brooks Robinson para los Orioles de Baltimore en 1955. Brooks Robinson jugó con Eddie Murray para los Orioles de Baltimore en 1977. Eddie Murray jugó con Omar Vizquel para los Indios de Cleveland en 1995.

Los ejemplos anteriores muestran que las redes de pequeño mundo abarcan el ámbito social, tecnológico, matemático y biológico, entre otros. Además de estos ejemplos, existen muchos otros sistemas que muestran la ubicuidad de la topología de pequeño mundo, tal como se observa en la Tabla 1.1.

Network	Size	$\langle k \rangle$	l	l_{rand}	C	C_{rand}	References	No.
WWW site level, undir.	153 127	35.21	3.1	5.35	0.1078	0.0023	Adamic, 1999	1
Internet, domain level	3015 6205	3.52 4.11	3.7 3.76	6.36 6.18	0.18 0.3	0.001	York et al., 2001a, Pastor-Satorras et al., 2001	2
Mexic actors	225 226	61	3.53	2.99	0.73	0.0027	Watts and Strogatz, 1998	3
LAN7 co-authorship	52 903	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-5}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	4
MC DIME co-authorship	153 051	16.1	4.5	4.91	0.66	1.1×10^{-5}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	5
SEI-GS co-authorship	26 637	1.73	4.0	3.12	0.73	0.005	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	6
NCSTRI co-authorship	11 994	3.99	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	7
Mala, co authorship	70 575	3.9	9.5	8.2	0.59	5.7×10^{-5}	Barabási et al., 2001	8
Neurosci. co authorship	203 293	11.3	6	3.01	0.78	5.5×10^{-5}	Barabási et al., 2001	9
E. coli, substrate graph	282	7.33	2.9	3.04	0.32	0.025	Wagner and Fell, 2003	10
E. coli, reaction graph	315	26.5	2.52	1.98	0.59	0.09	Wagner and Fell, 2003	11
Ythan estuary food web	54	8.7	3.43	3.26	0.22	0.05	Morozov and Sole, 2004	12
Silwood Park food web	54	4.7	3.49	3.23	0.15	0.05	Morozov and Sole, 2004	13
Wards, co-occurrence	46 002	70.13	2.57	3.03	0.437	0.0091	Ferrer i Cancho and Solé, 2005	14
Words, synonyms	32 311	13.48	3.8	3.84	0.7	0.0065	York et al., 2001b	15
Power grid	841	3.57	18.7	13.4	0.14	0.005	Watts and Strogatz, 1998	16
C. elegans	242	16	2.55	3.75	0.74	0.05	Watts and Strogatz, 1998	17

Tabla 1.1: *Características generales de algunas redes reales. Para cada red se indica el número de nodos, el grado promedio $\langle k \rangle$ de la red, la longitud característica l y el coeficiente de agrupamiento C . Para establecer comparación se han incluido la longitud característica l_{rand} y el coeficiente de agrupamiento C_{rand} de una red aleatoria del mismo tamaño y grado.*

My interest in social influence dates back even further than the beginning of my academic career.

Robert Axelrod, *The complexity of cooperation*.

Capítulo 2

Modelo de influencia cultural de Axelrod.

Un problema interesante que se plantean los sociólogos es el origen y persistencia de la diversidad cultural en una sociedad. En torno a este tópico se han desarrollado diversos modelos cualitativos y cuantitativos.

Uno de los modelos más relevantes ha sido propuesto por el sociólogo Robert Axelrod [12]. Axelrod introdujo un modelo dinámico conceptualmente simple, tipo autómatas celular, basado en agentes que interactúan entre sí y que permite estudiar el mecanismo de competencia entre la monoculturalidad y la multiculturalidad de un sistema social.

El modelo de Axelrod responde, en forma general, cuáles son los factores esenciales que determinan que un sistema social sea monocultural o multicultural.

2.1. El Modelo de Axelrod de influencia social.

Robert Axelrod comienza su artículo con la siguiente pregunta [12]:

“If people tend to become more alike in their beliefs, attitudes and behavior when they interact, why do not all differences eventually disappear?”

El modelo de Axelrod se basa en dos simples premisas:

- 1) La probabilidad de interacción entre individuos es proporcional al número de atributos culturales que ellos comparten.
- 2) La interacción entre individuos incrementa su similitud cultural.

Esto nos dice que dos personas tienden a interactuar mientras tengan, al menos, algo en común; así, esta interacción lleva a un aumento en su similitud, y la mayor similitud a una mayor probabilidad de interacción.

Axelrod define *cultura* como *un conjunto de atributos individuales que están sujetos a influencia social*.

El modelo no se enfoca en ninguna cultura específica, sino en la forma en la que cualquier cultura puede emerger y difundirse. Además, recordemos que los elementos que conforman este modelo no hacen juicios de valor, ni persiguen ninguna intención. Son agentes dinámicos adaptativos en vez de racionales.

2.1.1. Formulación matemática.

Una de las características importantes de este modelo es su capacidad de ser expresado mediante un formalismo matemático. Entonces, el vector cultural, o conjunto de atributos, de un agente i se puede expresar de la siguiente forma

$$C_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{if}, \dots, \sigma_{iF}), \quad (2.1)$$

donde σ_{if} es el f -ésimo atributo cultural del agente i , y F es el número de atributos culturales (*features*) o la dimensión del vector cultural. Además,

$$\sigma_{if} \in \{0, \dots, q - 1\}, \quad (2.2)$$

donde q es el número de rasgos (*traits*) por atributo. Así, existen q^F estados culturales posibles para cada agente.

Para ilustrar el modelo, consideremos el siguiente ejemplo con $F = 3$ atributos culturales y $q = 2$ rasgos por atributo. Estos parámetros permiten 8 estados culturales diferentes y equivalentes. Si asignamos a q los valores 0 y 1, los posibles estados culturales son

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, supongamos que nos referimos a la comunidad de nuestro grupo de caóticos en la ULA. Entonces, el vector cultural de cada caótico estaría dado por

$$C_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}), \quad (2.3)$$

donde los atributos σ_{ij} representan al área de trabajo, la preferencia en la bebida y las distribuciones de sistema Linux utilizado. Si las diferentes opciones que se tienen son

área: (0)Sociofísica, (1)Sist. Dinámicos
 bebida: (0)Cerveza, (1)Vino
 Sist. Linux: (0)Red Hat (1)Suse,

se puede etiquetar a un caótico que sea sociofísico, beba cerveza y que prefiera la distribución de sistema linux Suse en su computador con el vector cultural

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, de la misma manera en que se identifica a cada caótico en el ejemplo anterior, también se puede identificar a cada agente que forma parte de un sistema específico por su vector cultural. Además, se puede definir claramente la similitud entre dos elementos cualesquiera comparando sus vectores culturales.

2.1.2. Dinámica de Interacción.

El modelo de Axelrod asume una distribución geográfica de agentes individuales que permanecen fijos en un arreglo de red bidimensional $N \times N$, donde N es el

número de agentes del sistema. Cada agente se encuentra conectado con sus cuatro vecinos más cercanos (este, oeste, norte, sur). La Figura 2.1 muestra esta red. La dinámica de interacción entre estos agentes, definida por Axelrod, es la siguiente

- (1) Seleccione en forma aleatoria un par de nodos (i, j) de la red que se encuentren conectados.
- (2) Calcule la similitud cultural (*overlap*) entre los agentes seleccionados,

$$l(i, j) = \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_{if}, \sigma_{jf}}. \quad (2.4)$$

- (3) Si $0 < l(i, j) < F$, se dice que el enlace se encuentra activo y los nodos i, j interactúan con una probabilidad

$$p_{ij} = \frac{\sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_{if}, \sigma_{jf}}}{F}. \quad (2.5)$$

- (4) En caso de interacción, se escoge h de forma aleatoria de tal manera que $\sigma_{ih} \neq \sigma_{jh}$, y se coloca $\sigma_{ih} = \sigma_{jh}$.

La forma cómo se lleva a cabo la dinámica en el sistema se muestra con el siguiente ejemplo.

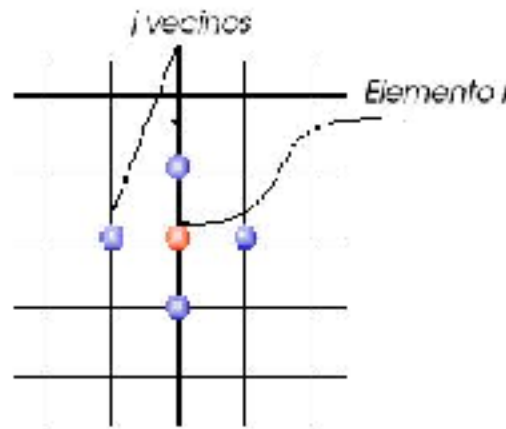


Figura 2.1: Red bidimensional. El elemento i posee $j = 4$ vecinos.

Se tiene una red de $N \times N$ donde $F = 3$ y $q = 10$. Entonces se tienen q^F (10^3) estados culturales equivalentes.

Centremos nuestra atención en los elementos (i, j) de la red (Figura 2.1). Supongamos que estos elementos tienen un vector cultural

$$C_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, C_j = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Así, al calcular la similitud cultural entre ellos se puede observar, de acuerdo al paso (2), una probabilidad de interacción de $p_{ij} = \frac{1}{3}$. Luego, al llevarse a cabo la interacción, el vector cultural de i toma un rasgo de uno de los atributos en los que difiere del vector cultural de j , lo cual deja como resultado

$$C_i = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, C_j = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix},$$

cambiando el rasgo del primer atributo del elemento i de 3 a 5 incrementando, así, su similitud cultural. Por lo tanto, la probabilidad de interacción entre estos elementos aumenta a $p_{ij} = \frac{2}{3}$ para futuras interacciones.

Al estudiar la evolución del modelo sobre una red $N \times N$, se observa que el sistema se congela asintóticamente. El sistema puede alcanzar un estado homogéneo, en el cual todos los agentes convergen a un mismo vector cultural; este estado se denomina monocultural. También, el sistema puede congelarse en un estado multicultural, en el cual coexisten regiones que poseen vectores culturales diferentes. Las regiones culturales o dominios se definen como el conjunto de agentes adyacentes que poseen un mismo vector cultural.

Estos estados asintóticos fueron observados por Axelrod al estudiar su modelo en función de los parámetros q y F .

2.1.3. Transición de fase en el modelo de Axelrod.

Al estudiar el modelo de Axelrod en función del parámetro q con F fijo, Castellano *et al.* [13] observaron una transición de fase de primer orden para un valor crítico q_c , lo cual ha sido confirmado por otros investigadores [14].

En la Figura 2.2 se muestran los estados inicial y asintótico para valores de $q < q_0$ y $q > q_0$, para los que se observan monoculturalidad y multiculturalidad, respectivamente.

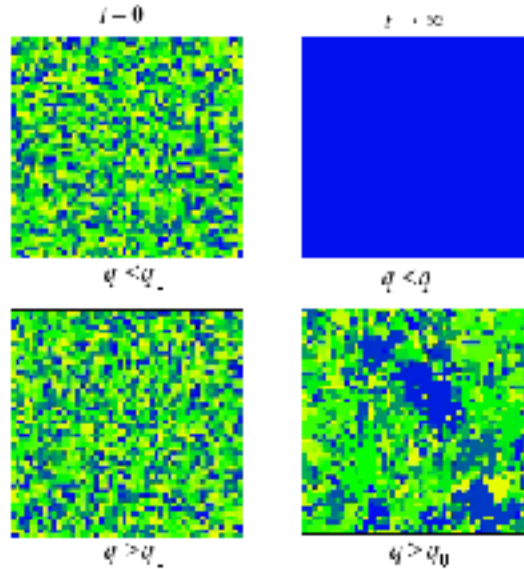


Figura 2.2: Simulación para una red 50×50 , con $F = 10$. Estados iniciales y asintóticos.

En analogía con un sistema físico el parámetro q se puede interpretar como un parámetro de control. Esto es, q define el grado de desorden inicial del sistema. Se puede definir un parámetro de orden $\langle S_{max} \rangle / N$ como el tamaño relativo del dominio más grande.

La Figura 2.3 muestra la transición de fase para un valor de $q_0 \approx 54$ en el que la configuración del sistema pasa, en forma abrupta, de ser monocultural a multicultural. Para valores $q < q_0$, $\langle S_{max} \rangle / N \approx 1$, donde el dominio más grande es del orden N ; y para valores de $q > q_0$, $\langle S_{max} \rangle / N \approx 0$, donde el dominio más grande es muy pequeño comparado con N .

Otra característica importante de este modelo es que la transición se hace más evidente cuando N va aumentando su valor. Este comportamiento es análogo al de un sistema termodinámico en el cual, cuando el número de partículas que conforman un sistema tiende a infinito ($N \rightarrow \infty$), las transiciones de fase se vuelven mejor definidas.

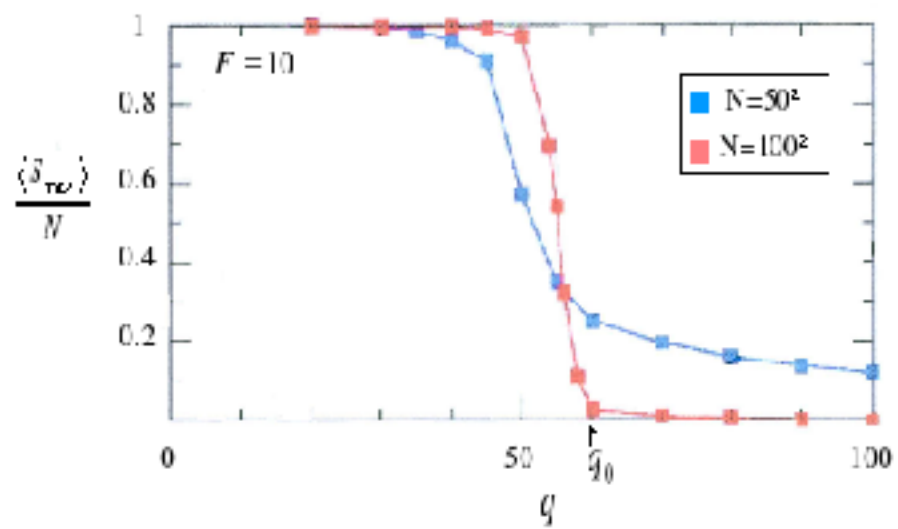


Figura 2.3: Transición de fase en el modelo de Axelrod. $F = 10$.

*La moda es una forma de fealdad tan intolerable,
que cada seis meses tenemos que modificarla.*

Oscar Wilde

Capítulo 3

Influencia del estado cultural predominante (Moda).

Aunque las redes sociales reales están muy lejos de ser completamente regulares o completamente aleatorias, comparten algunas características con esas redes. Por un lado, se sabe ahora que las redes sociales son *pequeñas*, es decir, cualquier par de nodos pueden ser conectados siguiendo un número de enlaces mucho menor que el tamaño de la red; característica que comparten con las redes aleatorias. Por otro lado, las redes sociales también forman grupos de nodos altamente conectados entre sí. Este agrupamiento puede ser caracterizado con el llamado coeficiente de agrupamiento C , definido como la fracción de vecinos de un elemento que también son vecinos entre sí. Esta característica también la presentan las redes regulares. Un alto coeficiente de agrupamiento y una longitud característica pequeña definen una red de pequeño mundo.

El primer modelo sobre el efecto de pequeño mundo fue introducido por Watts y Strogatz mediante un algoritmo que interpolaba entre una red aleatoria y una red regular como vimos en el Capítulo 1.

En el Capítulo 2, expusimos el modelo de dinámica cultural de Axelrod. La

simplicidad conceptual de este modelo permite diversas generalizaciones como, por ejemplo, ser implementado sobre redes con diferentes topologías de conectividad.

En este Capítulo, investigaremos el modelo de Axelrod definido sobre redes de pequeño mundo, las cuales proporcionan representaciones más realistas de las redes sociales.

Una pregunta interesante sobre el comportamiento de un sistema social es cómo los elementos del sistema son influenciados por su entorno. Un ejemplo de este comportamiento puede ser la tendencia de grupos de amigos a poseer el mismo estilo de ropa; preferencia a frecuentar los mismo lugares, etc. En general, las redes sociales reales están sujetas al conocido fenómeno de la moda.

Nos proponemos estudiar el efecto de la influencia cultural del entorno o moda sobre el comportamiento de un sistema social representado por una red de pequeño mundo, manteniendo los principios básicos del modelo original de Axelrod [12].

3.1. Nuestro modelo de red de pequeño mundo.

EL algoritmo de la red original de Watts y Strogatz [6] permite construir una red de pequeño mundo a partir de una red unidimensional con condiciones de borde periódicas. Al variar la probabilidad de reconexión p las propiedades de la red pasan de una red regular a una red aleatoria. La red de pequeño mundo en este modelo ocurre para valores intermedios de p .

En esta sección presentamos un algoritmo generalizado para construir una red de pequeño mundo a partir de una red euclidiana n -dimensional con condiciones de borde periódicas, manteniendo las ideas básicas del modelo original de Watts y Strogatz [6], como se muestra en la Figura 3.1

Nuestro algoritmo para la construcción de redes de pequeño mundo es el siguiente:

- 1) Se contruye una red n -dimensional con condiciones de borde periódicas, donde cada elemento está conectado con k vecinos inmediatos.
- 2) Con una probabilidad p se recablean las conexiones existentes.

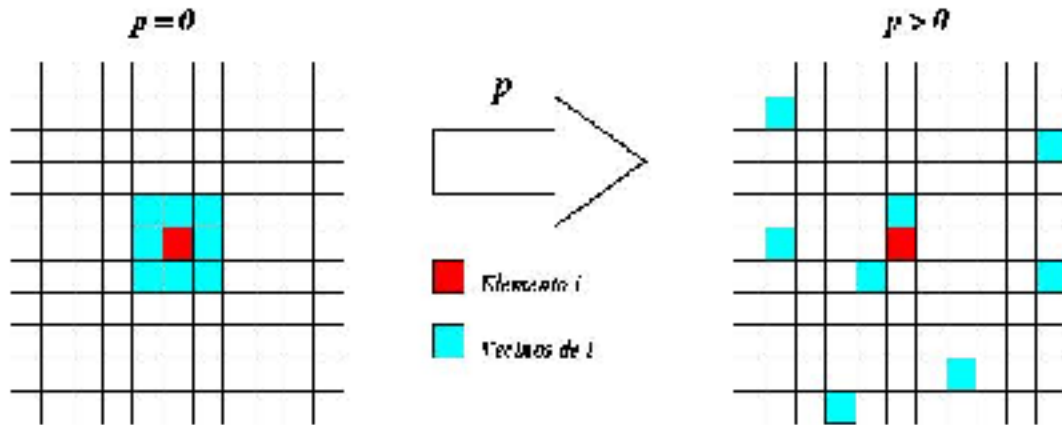


Figura 3.1: Esquema de construcción de nuestra red de pequeño mundo partiendo de una red bidimensional euclidiana. $k = 8$.

Para nuestra red, lo mismo que para el modelo original, no se permiten auto-conexiones ni conexiones repetidas entre nodos o elementos.

Al aumentar el valor de la probabilidad de reconexión p se puede observar paulatinamente el paso de una red regular a una red aleatoria.

Al explorar el comportamiento de nuestra red para $0 < p < 1$ se observa que tanto la longitud característica $L(p)$ y el coeficiente de agrupamiento $C(p)$ se comportan similarmente al modelo original de Watts-Strogatz [6]. En este trabajo estudiaremos específicamente la red de pequeño mundo originada a partir de una red binidimensional.

La Figura 3.2 muestra L y C como función de p . En el gráfico, los valores de L y C han sido normalizados con los valores de $L(0)$ y $C(0)$ respectivamente, que corresponden a los valores de longitud característica y de coeficiente de agrupamiento para una red regular ($p = 0$).

La Figura 3.2 nos permite identificar dos hechos relevantes para nuestra investigación:

- 1) El comportamiento de nuestra red de pequeño mundo muestra las mismas características que las del modelo original de Watts y Strogatz.
- 2) La definición de la región del rango de parámetro p donde la red adquiere propiedades de pequeño mundo, en la cual nos concentraremos en el presente

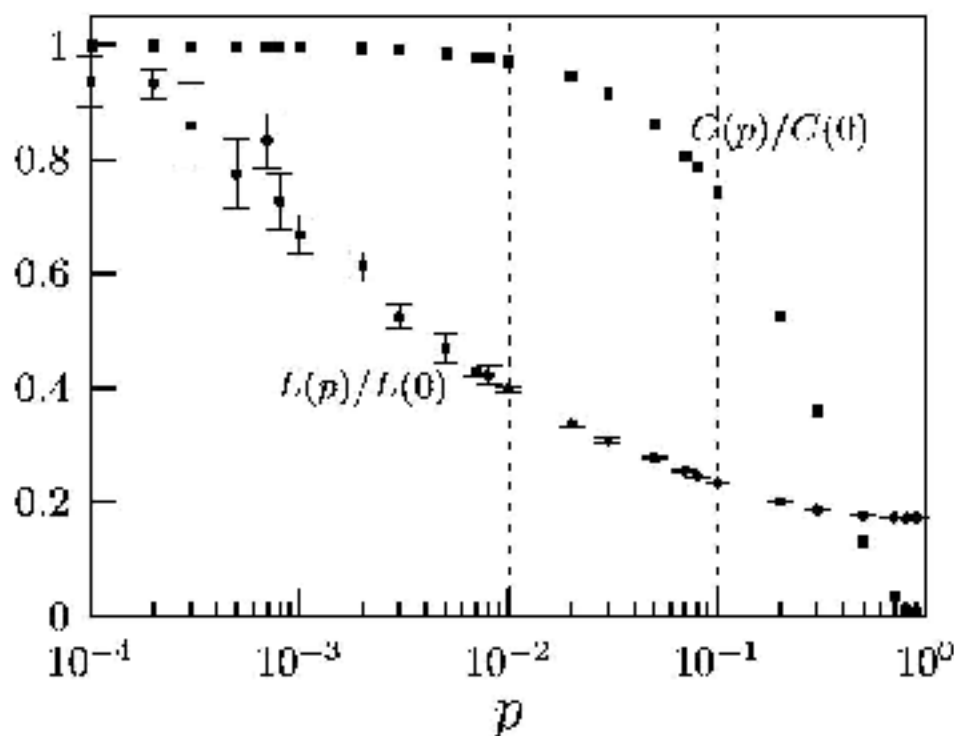


Figura 3.2: $L(p)/L(0)$ y $C(p)/C(0)$ vs p .

trabajo.

Para nuestro propósito, se tomarán en cuenta como la región de pequeño mundo el rango $p \in [0,01, 0,1]$. En esta región se observa que la disminución del valor del coeficiente de agrupamiento $C(p)$ no es muy significativo con respecto al de una red regular (20 %); mientras que se observa una disminución considerable de la longitud característica $L(p)$ con respecto a una red regular (80 %), lo que nos acerca bastante a la longitud característica de una red aleatoria.

Por lo tanto, en la región ya mencionada se cumplen los requisitos de la definición de una red de pequeño mundo, dada en el Capítulo 1.

Una vez construida nuestra red de pequeño mundo y definido el intervalo de p sobre el cual trabajaremos, implementamos la dinámica que regirá el comportamiento de los elementos de la red. Esta es la dinámica de influencia cultural de Axelrod [12] la cual fué descrita en el Capítulo 2.

En [14] se estudió, sobre una red de pequeño mundo, la dependencia del parámetro

de orden $\langle S_{max} \rangle / N$ en función del parámetro q , para diversos valores del parámetro de reconexión p , observando que el valor crítico q_0 aumenta al aumentar p como lo muestra la Figura 3.3.

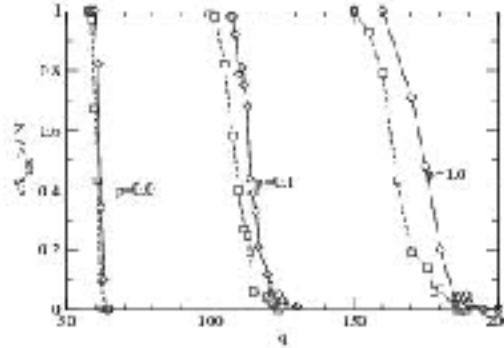


Figura 3.3: El parámetro de orden $\langle S_{max} \rangle / N$ en función del parámetro de reconexión p para una red de pequeño mundo. Tamaño del sistema: $N = 500^2$ (cuadrados) y $N = 1000^2$ (rombos). Los valores son promedios de 100 corridas independientes. [14]

Para caracterizar la transición de homogeneidad cultural a multiculturalidad en nuestro caso, introducimos como parámetro de orden al número promedio de grupos que se forman en el sistema en el estado asintótico, y que denotamos por g [15],

$$g = \frac{\langle N_g \rangle}{N}, \quad (3.1)$$

donde N_g es el número de grupos en el estado asintótico y N es el tamaño del sistema.

La Figura 3.4 muestra el parámetro de orden g en función del parámetro q , para diferentes valores de la probabilidad de reconexión p . Se encuentra que cuando p aumenta, q_0 también aumenta. Esto significa que el incremento de desorden favorece la homogeneidad del sistema.

Como ocurre en sistemas físicos la transición de fase se encuentra mejor definida en el límite termodinámico, es decir, cuando $N \rightarrow \infty$.

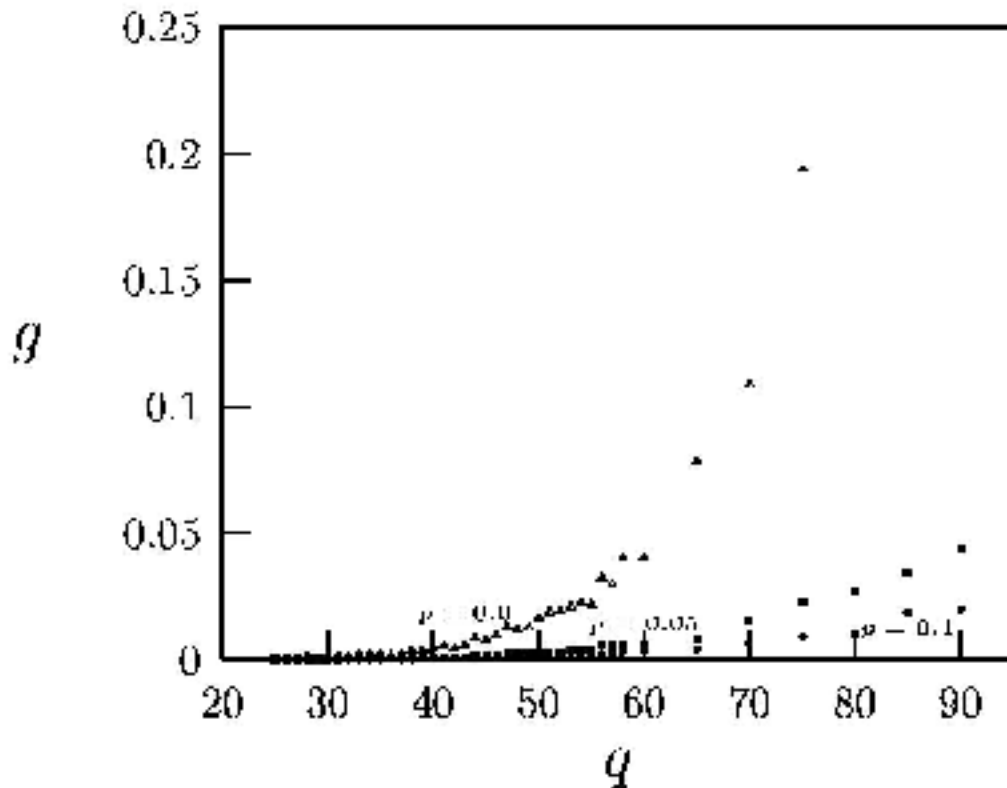


Figura 3.4: *Parámetro de orden g en función q para 3 valores de la probabilidad de reconexión p . Tamaño del sistema $N = 50^2$, $F = 10$.*

3.2. Modelo de influencia cultural predominante del entorno o “Moda”.

Debido a su simplicidad conceptual, el modelo de Axelrod permite diversas extensiones que el mismo autor sugiere al final de su artículo [12]. Una extensión interesante consiste en estudiar cuál sería el comportamiento de un sistema social cuando los elementos se encuentran sujetos a la influencia de su entorno local. Parafraseando a Axelrod nos planteamos la siguiente pregunta:

¿Como se comporta un sistema social cuando cada elemento es influenciado por el estado cultural predominante (moda) de su entorno?

Para responder a esta pregunta, proponemos un modelo simple de dinámica social con influencia del estado cultural predominante del entorno, manteniendo los principios básicos del modelo original de Axelrod. A este estado cultural predominante lo llamamos Moda.

Definimos “Moda” local del elemento i como el *vector cultural cuyo f -ésimo atributo corresponde al rasgo más abundante de ese atributo entre los vectores culturales de los elementos del entorno de i .*

El vector moda asociado con el elemento i , en analogía con el vector de estado de un elemento para el modelo de Axelrod original, se expresa con la siguiente notación:

$$C_M(i) = (\sigma_{M1}, \sigma_{M2}, \dots, \sigma_{Mf}, \dots, \sigma_{MF}) \quad (3.2)$$

donde F es la dimensión cultural o número de atributos del sistema, y

$$\sigma_{Mf} \in \{0, \dots, q - 1\}, \quad (3.3)$$

con q el número de rasgos por atributo. En la siguiente subsección se explica como se calculan los atributos predominantes σ_{Mf} .

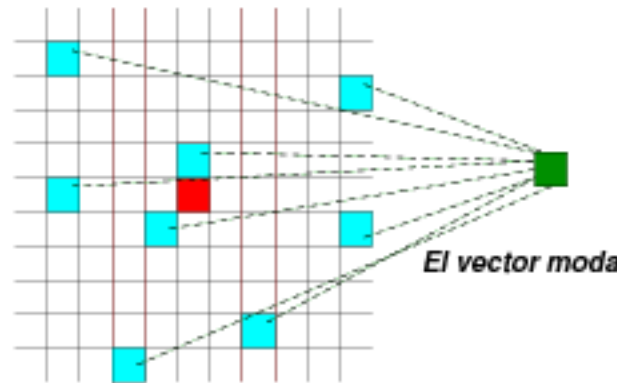


Figura 3.5: Esquema de obtención del vector “moda”.

3.2.1. Obtención del vector Moda.

Para obtener el vector moda asociado a un elemento i , que posee un vector cultural C_i , utilizaremos el siguiente algoritmo:

- 1) Dados los vectores culturales de los k elementos vecinos de i , se selecciona el rasgo más abundante (que más se repita) de cada atributo entre esos vectores culturales.
- 2) Se le asigna cada rasgo más abundante por atributo al correspondiente atributo del vector moda.
- 3) Si un rasgo más abundante de un atributo se repite un número igual de veces que otro, se escoge cualquiera de ellos de forma aleatoria

Veamos como trabaja este algoritmo con el siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos un sistema en el que $F = 3$ y $q = 10$. Por lo tanto existen 10^3 estados culturales equivalentes. Escogemos un elemento i de la red, y supongamos que los vectores culturales de sus $k = 8$ vecinos son

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo el algoritmo de construcción, se observa que, para el primer atributo cultural de cada vecino, el rasgo predominante es 8. Luego, el rasgo del primer atributo del vector moda asociado al elemento i será 8. Para el segundo atributo, el rasgo predominante es 7; y para el tercer atributo se presenta la situación de que se tienen dos rasgos con igual número de ocurrencias. Estos son 9 y 1, los cuales se repiten dos veces cada uno. Por lo tanto, el vector moda podría ser

$$C_M(i) = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se selecciona uno de ellos al azar, siguiendo el paso 3 del algoritmo. Este proceso se repite cada vez que algún elemento de la red se encuentre activo.

La introducción del vector moda en el modelo es semejante a la inclusión de un vecino virtual (en este caso un noveno vecino) el cual tiene las características más abundantes del entorno del elemento seleccionado. Además, este vector va variando con el tiempo, ya que se obtiene a partir de la vecindad del elemento i , la cual también cambia al evolucionar el sistema.

3.2.2. Dinámica de interacción con el vector moda.

Una vez obtenido el vector moda $C_M(i)$ para el elemento i seleccionado, la probabilidad de interacción de i con la moda es proporcional al número de atributos culturales que el vector C_i comparte con el vector $C_M(i)$.

Para caracterizar el grado de influencia que la moda local tiene sobre un sistema, introduciremos un parámetro $M \in [0,1]$, que mide la intensidad de la moda local, o la probabilidad que tienen los elementos del sistema de ser afectados por la moda de su entorno. El parámetro M acopla al elemento i con la moda de su entorno, y se puede interpretar como el parámetro de acoplamiento local que aparece con frecuencia en redes de mapas acoplados. Hay que destacar que M no es el vector moda, sino la intensidad con la cual el elemento i interactúa con ese vector. La magnitud de M se le puede asignar a un sistema para describir su susceptibilidad a la moda local.

Supondremos que todos los elementos de la red son influenciados por la moda con la misma intensidad M , es decir, que la susceptibilidad del sistema a seguir la moda es uniforme.

Si un elemento i tiene una probabilidad M de ser captado para interactuar con el vector moda local, la probabilidad de interacción de i con cualquiera de sus vecinos es $(1 - M)$. Una vez seleccionado el vecino j , la interacción cultural con i sigue la dinámica de Axelrod.

Cuando $M = 0$, se tiene el modelo original de Axelrod; y cuando $M = 1$ el elemento i sólo interactúa con la moda, caso que llamamos “moda global”. Es decir, cada vez que un elemento es seleccionado para interacción, este sólo lo hará con su vector moda local $C_M(i)$.

Si la probabilidad M es tal que el elemento i es seleccionado para interactuar con la moda en lugar de con sus vecinos, la interacción, entre el vector C_i y el vector $C_M(i)$ es proporcional a la similitud cultural que tengan, es decir,

$$p_{iM} = \frac{\sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_{if}, \sigma_{Mf}}}{F}. \quad (3.4)$$

Este proceso se repite cada vez que se encuentre activo un elemento i de la red.

3.3. Resultados del modelo con influencia del entorno (Moda).

Al implementar la topología de una red de pequeño mundo, la dinámica de interacción cultural de Axelrod y la interacción con la moda local, tenemos una generalización del modelo original de Axelrod, el cual se puede obtener como un caso límite de nuestro modelo cuando $p \rightarrow 0$ y cuando $M \rightarrow 0$.

En esta sección estudiaremos la influencia de la moda sobre el estado asintótico del sistema mediante la variación del nuevo parámetro M . Utilizaremos como parámetro de orden la fracción promedio de grupos culturales en el sistema g definida anteriormente.

Recordemos que un grupo o región cultural está formado por elementos adyacentes que poseen un vector cultural idéntico.

Los valores de p utilizados en nuestras simulaciones se encuentran dentro del rango en el cual se manifiesta el fenómeno de pequeño mundo en nuestra red, como se muestra en la Figura 3.2.

Para cada selección de parámetros en nuestro sistema, las simulaciones se realizaron 10 veces, con distintas condiciones iniciales. Los valores de los parámetros de orden en los gráficos muestran los valores promedios de las 10 corridas y las barras de error corresponden a su desviación estándar.

La Figura 3.6 muestra la gráfica de g como función de M para una probabilidad de reconexión $p = 0,01$, y un valor de $q = 25 < q_o \approx 54$.

Para $M \rightarrow 0$, la Figura 3.6 muestra que el sistema es monocultural, con $g \rightarrow 0$ como correspondería para este valor de $q < q_o$ en el modelo original de Axelrod. Podemos observar cómo el incremento del parámetro M induce un aumento en g , indicando el surgimiento de multiculturalidad en el sistema. Existe un valor crítico M_c para el cual el sistema pasa de monoculturalidad a multiculturalidad. Esta multiculturalidad se debe a la influencia del entorno local y no es impuesta externamente.

La Figura 3.7 muestra el parámetro de orden g en función de M , manteniendo q fijo, para distintos valores de la probabilidad de reconexión p .

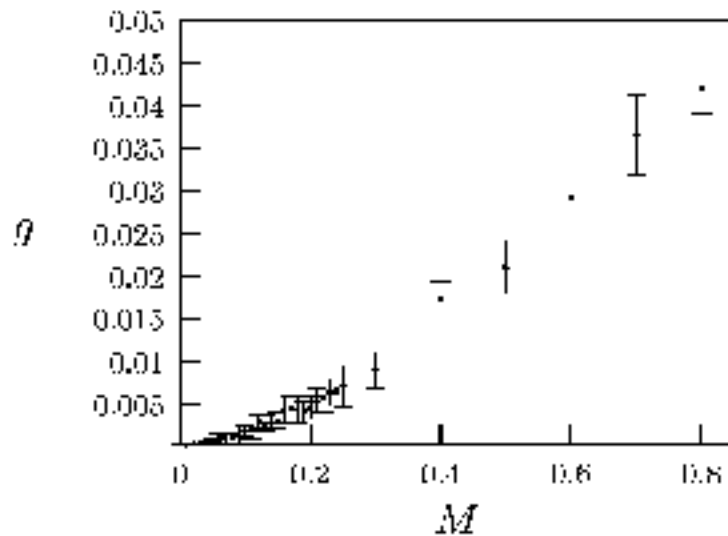


Figura 3.6: *Fracción media de grupos (g) en el estado asintótico en función del parámetro M . $N = 50^2$, $F = 10$, $p = 0,01$, $q = 25$.*

Notese que el valor crítico M_c para el cual el sistema pasa de ser monocultural a multicultural aumenta al aumentar la probabilidad de reconexión p .

Estos resultados sugieren que el acoplamiento con la moda del entorno induce una transición de fase en el parámetro de orden g , la cual, en analogía con sistemas termodinámicos, podemos describir por la relación de escala

$$f(M) \propto (M - M_c)^\beta, \quad M \rightarrow M_c, \quad (3.5)$$

donde β representa el exponente crítico de la transición, y determina el orden de ésta.

Las transiciones de fase con $\beta = 0$ son transiciones de primer orden, y se manifiestan por una discontinuidad del parámetro de orden en el valor crítico del parámetro de control. Exponentes críticos $0 < \beta < 1$ corresponden a transiciones de fase de segundo orden, y se evidencian por una discontinuidad en la primera derivada del parámetro de orden en el valor crítico del parámetro de control. Transiciones de fase de orden superior corresponden a $\beta > 1$ y presentan discontinuidades a partir de la segunda derivada del parámetro de orden y son más difíciles de determinar

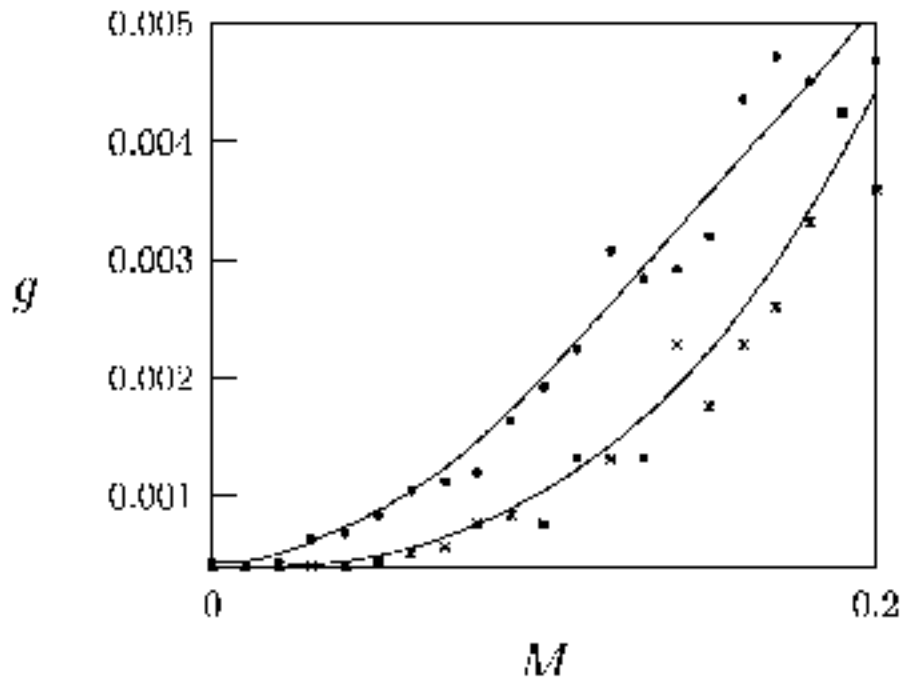


Figura 3.7: *Parámetro de orden g en función de la moda M para distintos valores de p ($q = 25$. $p = 0,01$ (círculos), $0,1$ (estrellas)).*

experimental o numéricamente.

El exponente crítico β se puede determinar a partir de la pendiente en un gráfico de $\log(g)$ vs. $\log(M - M_c)$.

Las transiciones mostradas en las Figuras 3.6, 3.7 corresponden a valores de $\beta \geq 1$, es decir, a transiciones de fase de orden superior, lo cual dificulta la determinación precisa del valor crítico M_c y el cálculo del exponente crítico β . Hemos encontrado que el rango de β para las transiciones de fase correspondientes a valores $q < q_0$, y para valores de p en el rango de red de pequeño mundo, presentan exponentes críticos en el rango

$$1,2 < \beta < 1,93. \tag{3.6}$$

El comportamiento de la transición de fase inducida por la moda contrasta con el comportamiento observado recientemente de las transiciones de fase inducidas por una influencia cultural externa o propaganda [15], las cuales son de segundo orden.

En nuestro caso el sistema es autónomo, en el sentido de que la influencia de la moda es generada por el entorno local; mientras que un sistema sujeto a la influencia de un vector cultural externo o propaganda puede considerarse como un sistema espacio-temporal forzado.

*En el centro de Europa están conspirando.
Se trata de hombres de diversas estirpes, que profesan diversas
religiones y que hablan en diversos idiomas.
Han resuelto olvidar sus diferencias y acentuar sus afinidades.
Han tomado la extraña resolución de ser razonables.*

Jorge Luis Borges, Los conjurados.

Conclusiones

Uno de los objetivos fundamentales de la nueva ciencia denominada Sociofísica es intentar comprender las variables esenciales que influyen en propiedades globales de sistemas sociales, mediante el establecimiento de analogías con sistemas físicos.

En esta tesis hemos propuesto un modelo simple que permite simular la influencia cultural del entorno en un redes de pequeño mundo, las cuales son ubicuas en sistemas sociales reales. La dinámica de interacción cultural que hemos usado corresponde a la del modelo de Axelrod, que ha captado la atención de los físicos por su simplicidad conceptual para explicar la emergencia de diversidad cultural.

Hemos desarrollado un algoritmo propio para generar redes de pequeño mundo a partir de redes euclidianas en n dimensiones. Hemos verificado que las propiedades estadísticas y topológicas de nuestro modelo de red corresponden a aquellas de redes de pequeño mundo, según el modelo original de Watts y Strogatz.

El modelo presentado en esta tesis puede considerarse como una extensión del modelo original de Robert Axelrod.

En cuanto a la influencia de la topología de la red, hemos observado que la probabilidad de reconexión p juega un papel importante en las propiedades colectivas del sistema. Al aumentar el valor del parámetro p , el valor de q_0 , para el que ocurre

la transición de monoculturalidad a multiculturalidad, se incrementa. Puesto que q mide el número de opciones disponibles por atributo cultural, nuestros resultados indican que el incremento del desorden en la conectividad de la red social favorece la homogeneidad cultural del sistema.

Para modelar la influencia cultural predominante del entorno local en redes sociales, hemos introducido el concepto de *moda*. Hemos propuesto un algoritmo para calcular el vector cultural *moda* asociado al entorno local de un elemento i de la red. En nuestro modelo, el concepto de moda local surge de manera autónoma en el sistema. En trabajos anteriores [15] se ha investigado la influencia de una propaganda externa impuesta al sistema. Nuestros resultados permiten comparar el comportamiento de un sistema social autónomo con el comportamiento de un sistema social forzado externamente.

La susceptibilidad del sistema a seguir la moda se ha modelado mediante la introducción del parámetro de acoplamiento local M . Este parámetro juega un papel similar al parámetro de acoplamiento usado en muchos modelos de redes de mapas acoplados o de autómatas celulares.

Como se puede observar en la Figura 3.6, el incremento del parámetro M induce un aumento en el número de grupos culturales que se forman asintóticamente en el sistema. Este comportamiento se puede interpretar como una transición de fase de orden superior en el parámetro de orden g . Esto significa que la moda puede inducir multiculturalidad en un sistema inicialmente monocultural. Este resultado es particularmente relevante.

El incremento de desorden en la red, expresada por la probabilidad de reconexión p , facilita la monoculturalidad, mientras que el incremento de la influencia de la moda, medido por el parámetro M , induce multiculturalidad en el sistema. Por lo tanto, se establece una competencia entre estos dos parámetros que determinan el estado asintótico del sistema.

Nuestro modelo sugiere varias posibles extensiones del modelo original de Axelrod, entre las que podemos mencionar

- 1) **Extensión del entorno.** Se puede estudiar la influencia del entorno cuando el número de vecinos aumenta. El caso límite sería un acoplamiento global, o to-

dos los elementos conectados con todos, lo que permitiría estudiar la influencia del vector moda global sobre el sistema.

- 2) **Inclusión de propaganda externa.** Se puede incluir, además de la moda local, un vector de propaganda que se acople con una probabilidad B a todos los elementos del sistema, y se puede estudiar la competencia entre los parámetros M y B .
- 3) **Implementar una dinámica en las conexiones.** Además de la dinámica que rige la interacción entre los elementos del sistema, es también interesante la implementación de conexiones variables o adaptativas. Esta dinámica en las conexiones representaría las relaciones sociales que se adquieren o que se pierden en el transcurso del tiempo, como lo proponen Ebel y Davidsen [3].
- 4) **Inclusión de líderes.** En sistemas sociales se puede ver a menudo algunos individuos influyentes o líderes, tales que son capaces de influenciar a sus elementos vecinos, sin ser apreciablemente afectados por ellos. Estos elementos líderes pueden establecer su vector cultural como una moda que podría influenciar a los demás elementos del sistema.

Nuestro trabajo es un ejemplo de que la Física puede aportar conceptos y herramientas valiosas para modelar algunos aspectos de la dinámica social. El auge experimentado actualmente por disciplinas tales como la Sociofísica y la Econofísica demuestra que la búsqueda de conceptos universales que ha caracterizado a la Física se ha extendido a dominios anteriormente considerados fuera del alcance de esta ciencia.

Bibliografía

- [1] M. E. J. Newman, "Small Worlds: The Structure of Social Networks". Sante Fe Institute. 99-12-080. (1999)
- [2] J. Davidsen, H. Ebel y S. Bornholdt, "Emergence of a Small World from Local Interactions: Modeling Acquaintance Networks", *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 8701 (2002).
- [3] H. Ebel, J. Davidsen y S. Bornholdt. "Dynamics of Social Networks". Wiley Periodicals, Inc., **8**, 2, (2003).
- [4] D. Watts. "Six Degrees: The Science of a Connected Age". W. W. Norton, New York, (2003)
- [5] R. Albert y A. Barabási, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1 (2002).
- [6] D.J. Watts and S.H. Strogatz, *Nature (London)* **393**, 440 (1998).
- [7] G. Corso, "Families and clustering in a natural numbers network", *Phys. Rev. E.*, **69**, 036106 (2004).
- [8] F. Lijeros, C. Edling, L. Amaral, H. Stanley, Y Aberg. *Nature* **411**, 907, (2001).
- [9] R. Albert, H. Jeong y A. Barabási, *Nature*, **401**, 130-131, (1999).
- [10] The Erdos number proyect. <http://www.oakland.edu/enp/>.
- [11] The oracle of baseball. <http://www.baseballreference.com/oracle/>.
- [12] R. Axelrod, "The dissemination of culture". *Journal of Conflict Resolution*, **41**, 203-226 (1997).

- [13] C. Castellano, M. Marsili y A. Vespignari, "Nonequilibrium phase transition in a model for social influence". *Phys. Rev. Let.*, **85**, 3536 (2000)
- [14] K. Klemm, V. Eguíluz, R. Toral, M. San Miguel. "Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction". *Phys. Rev. E*, **67**, 026120, (2003).
- [15] J. C. Gonzalez A. "Efecto de la propaganda en un modelo dinámico espaciotemporal de influencia cultural". Trabajo especial de grado. ULA. Octubre 2003.
- [16] Y. Shibantai, S. Yasuno, I. Ishiguro. "Effects of Global Information Feedback on Diversity". *Journal of Conflict Resolution*. **45**, Issue 1, p80, 17p, (2001)
- [17] A. L. Barabasi, "Linked: The New Science of Networks". New York, Springer (2002)