

# INFLUENCIA DE LA TOPOLOGÍA EN LA DISTRIBUCIÓN DE RIQUEZA EN UN MODELO DETERMINISTA DE INTERCAMBIO ECONÓMICO

(Influence of topology on the wealth distribution in a deterministic model of economic exchange)

<sup>1,2</sup>González-Estévez, J.; <sup>2</sup>Cosenza, M. G.; <sup>3</sup>López-Ruiz, R.; <sup>4,2</sup>Alvarez-Llamoza, O.

<sup>1</sup>Laboratorio de Física Aplicada y Computacional, Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela,

<sup>2</sup>Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela,

<sup>3</sup>DIIS y BIFI, Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, 50009 Zaragoza, España,

<sup>4</sup>Departamento de Física, FACyT, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela, Correo Electrónico: [jgonzale@unet.edu.ve](mailto:jgonzale@unet.edu.ve)

## RESUMEN

Se investiga un modelo determinista de mapas acoplados en redes de una y de dos dimensiones para describir la interacción económica de un conjunto de agentes. La dinámica de cada mapa o agente está controlada por dos parámetros. El primero está asociado con la capacidad de crecimiento del agente y el otro es un término de control que representa la presión del ambiente local que evita un crecimiento exponencial. Se calcula la probabilidad de distribución de riqueza en el sistema en función de estos parámetros. Se encuentran distribuciones de tipo exponencial (Boltzmann-Gibbs) o de tipo de ley de potencia (Pareto) en diferentes regiones de parámetros. Estas distribuciones son típicas de sistemas económico reales. Se encuentra que las distribuciones de probabilidad también dependen de la dimensionalidad de la red y del número de vecinos que participan en la interacción local. Se calcula el coeficiente de Gini para caracterizar la desigualdad en la distribución de la riqueza en el sistema en función de los parámetros. Nuestros resultados muestran que procesos completamente deterministas pueden dar lugar a fenomenologías observadas en sociedades reales.

**Palabras Clave:** Econofísica, modelos computacionales, redes de mapas acoplados, distribuciones de Pareto y Boltzmann-Gibbs.

## ABSTRACT

We investigate a deterministic model of coupled maps lattices in one and two dimensions to describe the economic interaction of a set of agents. The dynamics of each map or agent is controlled by two parameters. The first one is associated to an agent's growth capacity and the other is a control term that represents the local environment pressure that inhibits an exponential increase. The probability distribution of wealth in the system is calculated as a function of these parameters. It is found that these distributions can exhibit an exponential (Boltzmann-Gibbs) or a power-law (Pareto) behavior in different regions of parameters. Such distributions are typical of real economic systems. These probability distributions also depend on the dimensionality of the lattice and on the number of neighbors that participate in the local interactions. To characterize the inequality of the wealth distribution in the system, we calculate the Gini coefficient as a function of the parameters. Our results show that entirely deterministic processes can lead to the phenomenology observed in real societies.

**Key Words:** Econophysics, computational models, coupled map lattices, Pareto and Boltzmann-Gibbs distributions.

## INTRODUCCIÓN

La desigualdad en la distribución de la riqueza es un hecho bien documentado de la actividad económica. El origen de este fenómeno está relacionado con la interacción de la macroeconomía en la microeconomía, lo que conlleva, en muchos casos, la intervención de circunstancias aleatorias fuera del control de los agentes económicos. Así, está reportado que el ingreso de alrededor del 95% del total de la sociedad, justamente aquel colectivo conformado por agentes con ingresos medios y bajos, siguen una distribución exponencial (comportamiento Boltzmann-Gibbs; BG para abreviar de aquí en adelante), mientras que el 5% restante de la sociedad, asociada a los altos ingresos, se distribuye según una función potencial, que en el contexto económico se conoce como ley de Pareto (Dragulescu y Yakovenko, 2003; Yakovenko, 2007). Diferentes modelos (Dragulescu y Yakovenko, 2000; Chakraborti y Chakrabarti, 2000; Chatterjee *et al.* 2004; Angle, 2006) con ingredientes aleatorios han sido propuestos para reproducir estas distribuciones de ingresos que se encuentran comunmente en datos económicos reales (Levy y Solomon, 1997, Dragulescu y Yakovenko 2001a; Dragulescu y Yakovenko, 2001b; Souma, 2001).

Por otro lado, en muchos casos no es suficiente invocar mecanismos aleatorios para la distribución de la riqueza en las sociedades humanas, puesto que éste no es un proceso completamente fortuito, sino que presenta elementos de racionalidad y determinismo. El objeto de este trabajo consiste en demostrar la viabilidad de este punto de vista determinista y, por tanto, presentar una alternativa frente a la aleatoriedad como característica predominante en la dinámica de intercambio económico que conduce a las distribuciones de riqueza observadas en las sociedades. Específicamente, estudiamos un modelo determinista y conceptualmente simple basado en agentes interactivos donde la interacción de cada agente se realiza con sus vecinos más próximos en el espacio. El modelo dispone de pocos parámetros, los cuales al variar pueden conducir a distribuciones de probabilidad de riqueza de tipo BG o Pareto.

## MÉTODO

El modelo consiste en un sistema dinámico espacio temporal representado por  $N$  mapas ubicados en una red (unidimensional o bidimensional), con interacciones locales y con condiciones de contorno periódicas. Cada mapa representa un agente económico: una compañía, un país u otra entidad económica. El estado de cada agente, identificado por un coeficiente ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),

está caracterizado por un grado de libertad,  $x_i^t \in [0, \infty)$  denotando la fuerza, abundancia o riqueza del agente en el tiempo discreto  $t$ . El sistema evoluciona en el tiempo de forma sincrónica, es decir, los estados de todos los agentes se actualizan simultáneamente en cada paso de tiempo.

Cada agente actualiza su estado de acuerdo a su estado presente y a los estados de su vecindad. De esta forma, el valor del estado  $x_i^{t+1}$  está dado por el producto de dos factores: 1) el crecimiento natural del agente  $r_i x_i^t$  con un tasa local positiva  $r_i$  (cuyo valor es igual o mayor a 1, para garantizar el crecimiento de este término), y 2) un término de control que limita el crecimiento del agente con respecto al ambiente o su entorno local,  $\psi_t^i$ . De esta manera, la dinámica del sistema esta descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$x_{t+1}^i = r_i x_t^i \exp(-|x_t^i - a_i \psi_t^i|),$$

$$\psi_t^i = \frac{1}{n(i)} \sum_{j \in \nu(i)} x_t^j. \quad (1)$$

El sistema (1) corresponde a una red de mapas acoplados, donde  $x_i^t \geq 0$  indica el estado del agente  $i$  para el tiempo discreto  $t$ ,  $j \in \nu(i)$  es el conjunto de agentes en la red acoplados con el agente  $i$  y  $n(i)$  es la cardinalidad de este conjunto; el parámetro  $a$  mide la intensidad del acoplamiento del agente  $i$  con su vecindad; que también puede ser interpretado como la presión ambiental local ejercida sobre el agente  $i$  (Ausloos *et al.* 2003). La función exponencial negativa actúa como un inhibidor que limita este crecimiento con respecto al campo local (Sánchez y López-Ruiz, 2005; Sánchez *et al.* 2007; López-Ruiz *et al.* 2007a; López-Ruiz *et al.* 2007b; González *et al.* 2008).

Por motivos de simplicidad, estudiaremos escenarios con distribución homogénea de los parámetros. Así, reescribimos los parámetros como  $r$  (suponiendo que los agentes poseen la misma capacidad de crecimiento) y  $a$  (que corresponde a una presión de selección local homogénea). Consideramos un sistema descrito por las Ecs. (1) y (2), formado por  $N=10^5$  mapas con condiciones iniciales completamente aleatorias distribuidas uniformemente en el intervalo  $x_0^i (1, 100)$ .

En general, el comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado mediante el campo medio instantáneo de la red o actividad del sistema,  $H_t$  definido como:

$$H_t = \frac{1}{N} \sum_i^N x_t^i. \quad (2)$$

Adicionalmente, el coeficiente de Gini (Rodríguez-Achach y Huerta-Quintanilla, 2006),

$$G_t = \frac{1}{2N^2 H_t} \sum_{i,j=1}^N |x_t^i - x_t^j| \quad (3)$$

mide el grado de desigualdad relativa en la distribución de riqueza en el instante  $t$ . Este coeficiente está acotado entre los valores  $G_t = 0$  (todos los elementos tienen la misma riqueza; esto es, perfecta equidad,  $x_t^i = x_t^j, \forall i, j$ ) y  $G_t = 1$  (un elemento posee toda la riqueza del sistema  $\sum_{i=1}^N x_t^i$ ; es decir, máxima desigualdad). En consecuencia, cuanto menor es el valor del coeficiente Gini, menor es la desigualdad y viceversa (Bouchaud y Potters, 2000; Mantegna y Stanley, 2000; Voit, 2002).

Para examinar las condiciones en que el sistema puede exhibir los comportamientos estadísticos tipo BG o Pareto, son realizadas cien simulaciones para cada valor de barrido en el parámetro  $a$ , con el fin de disminuir las fluctuaciones estadísticas en los cálculos (Reed, 2002).

## RESULTADOS

### Régimen Boltzmann-Gibbs y Régimen Pareto

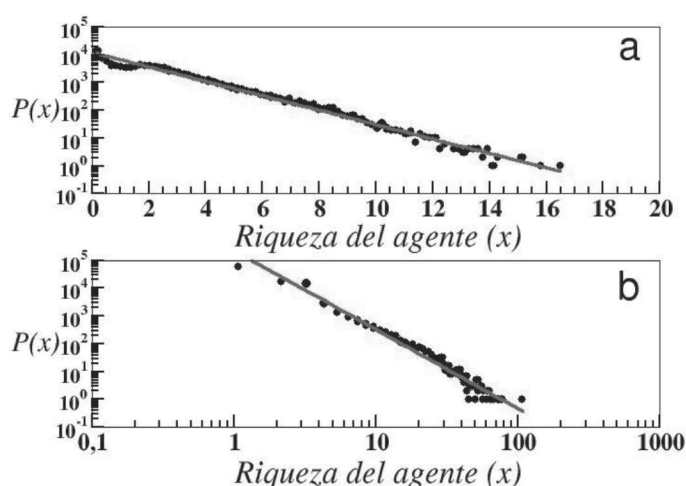
Una distribución de probabilidad tipo exponencial, o Boltzmann-Gibbs (BG), de una variable  $x$  presenta la

forma funcional  $P(x) \sim e^{-\mu x}$ , donde  $\mu$  es el exponente que caracteriza esta distribución. Por otro lado, una distribución de probabilidad tipo ley de potencia, o Pareto (P), se comporta como  $P(x) \sim x^{-\alpha}$  donde  $\alpha$  es un exponente característico.

La figura 1 muestra las distribuciones de probabilidad  $P(x)$  resultantes para el sistema (1) unidimensional en un tiempo asintótico donde el sistema es estadísticamente estacionario, para distintos valores de los parámetros  $a$  y  $r$ . Encontramos ambos tipos de distribuciones, con exponentes característicos calculados a partir de las pendientes de las gráficas por el método de mínimos cuadrados en una regresión semilogarítmica o bilogarítmica, según corresponda.

Para garantizar la confiabilidad de los resultados obtenidos para las distribuciones tipo BG o P, requeriremos que el valor de la correlación  $\beta$  en el cálculo de las pendientes correspondientes satisfaga el criterio  $|\beta| \geq 0,96$ .

Las figuras 2 y 3 muestran los valores de la correlación del ajuste exponencial y potencial  $\beta$ , en función del parámetro  $a$ , para distintos tipos de redes en una y en dos dimensiones, para un valor fijo  $r = 10$ . Esto permite seleccionar aquellas regiones de parámetros con distribuciones tipo BG y Pareto, que satisfagan el criterio  $|\beta| \geq 0,96$ .

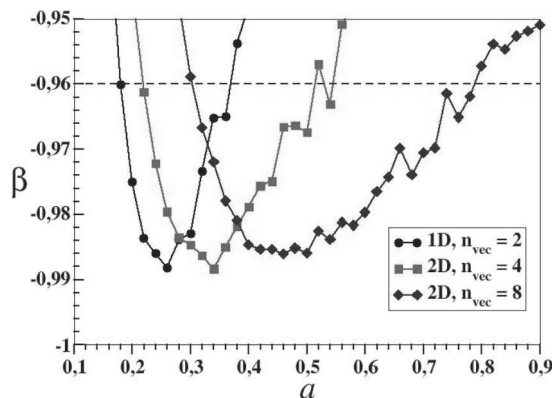


**Figura 1.** Distribuciones de probabilidad  $P(x)$  para diferentes valores de parámetros en un sistema (1) unidimensional con  $N = 10^5$ , para  $t = 10000$ . (a) Comportamiento BG, con  $a = 0,60$  y  $r = 4$ ; el exponente es  $\mu = -0,2593$  y coeficiente de correlación es  $\beta = -0,9943$ . (b) Ley de potencia (P), con  $a = 0,92$  y  $r = 8$ ; el exponente es  $\alpha = -2,8469$ , con  $\beta = -0,9849$ .

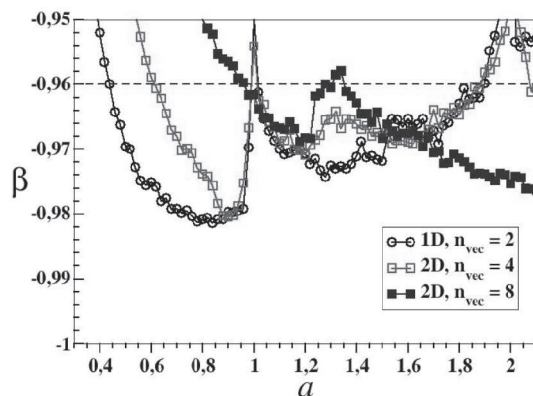
En el caso unidimensional con interacción con los dos vecinos más cercanos, se encuentra una región BG  $a \in (0,179 - 0,342)$  y dos regiones Pareto  $a \in (0,434 - 0,993)$  y  $a \in (1,025 - 1,893)$ . En el caso bidimensional con cuatro vecinos (o vecindad de Von Neumann) existe una región BG  $a \in (0,219 - 0,546)$  con dos regiones Pareto  $a \in (0,611 - 0,994)$  y  $a \in (1,015 - 1,887)$ . Finalmente, en el caso bidimensional, pero con ocho vecinos (vecindad tipo Moore) se encuentra una zona BG  $a \in (0,300 - 0,800)$  y una región Pareto para  $a \in (0,962 - 2,1)$ . Estos valores son el resultado de haber promediado cien realizaciones en cada barrido del parámetro  $a$ , de tal forma que nos referimos a valores promedios.

Una vez delimitadas las regiones de parámetros que exhiben comportamientos tipo BG y Pareto, según el criterio establecido, mostramos en la figura 4 los valores de los exponentes característicos  $\alpha$  y  $\mu$  en función del parámetro  $a$ .

En datos reales se ha encontrado que la economía del Reino Unido presenta una distribución de Pareto para un rango de ingresos altos con un valor de  $\alpha = 1,9$  en el año 1996; mientras que para la economía de EE.UU. se obtiene  $\alpha = 1,7$  para 1997. Pareto, en su obra clásica (Pareto 1897), estableció este exponente como  $\alpha = 1,5$  para varios países, siendo este el valor promedio de los resultados obtenidos en su trabajo. Levy y Solomon, 1997; Klass *et al.* 2006; Klass *et al.* 2007 indican un valor promedio  $\alpha = 1,49$ , tomando los datos de la lista "Forbes 400" (las cuatrocientas personas más ricas sobre el planeta) durante los años 1988 al 2003; y Souma reporta un valor de  $\alpha = 2,05$  dentro de los ingresos más altos en Japón (Souma, 2001; Souma, 2002). Los resultados de la figura 4 muestran que es posible obtener un amplio rango de valores de este exponente, incluyendo valores realistas, mediante la variación continua de un parámetro en nuestro modelo determinista de mapas acoplados.



**Figura 2.** Coeficiente de correlación  $\beta$  en función del parámetro  $a$  en la región de comportamiento BG para distintos tipos de redes, con  $N = 10^5$  y  $r = 10$  fijo. El cálculo corresponde a  $t = 10000$ . La línea punteada horizontal corresponde al valor  $\beta = -0,96$ .



**Figura 3.** Coeficiente de correlación  $\beta$  en función del parámetro  $a$  en la región de comportamiento tipo ley de potencia (Pareto) para distintos tipos de redes, con  $N = 10^5$  y  $r = 10$  fijo. El cálculo corresponde a  $t = 10000$ . La línea punteada horizontal corresponde al valor  $\beta = -0,96$ .

**Riqueza promedio**

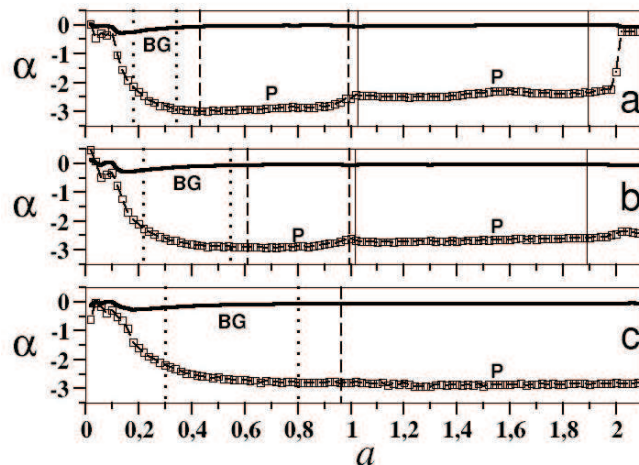
El campo medio  $H_t$  ofrece información acerca del valor medio promedio de la riqueza en el sistema. En la figura 5 encontramos que los valores máximos y mínimos en las regiones BG son para el caso unidimensional:  $H_t(\text{mín})=2,471$  y  $H_t(\text{máx})=2,597$ , en el caso bidimensional con cuatro vecinos se obtiene que  $H_t(\text{mín}) = 2,222$  y  $H_t(\text{máx}) = 2,644$  y finalmente en dos dimensiones y un entorno local de ocho vecinos se presenta un  $H_t(\text{mín}) = 1,901$  y  $H_t(\text{máx}) = 2,640$ .

Para las regiones cuyo comportamiento sigue la ley de Pareto, y tomando como referencia dicha zona antes de  $a = 1$ , en el caso unidimensional se tiene que  $H_t(\text{mín})=1,294$  y  $H_t(\text{máx}) = 2,339$  y con dos dimensiones

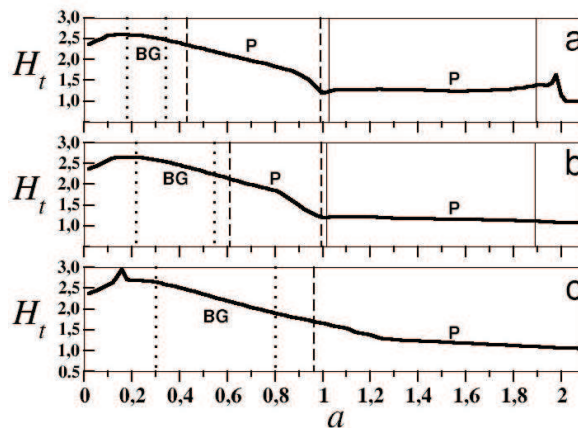
y una interacción local de 4 vecinos, se obtiene  $H_t(\text{mín}) = 1,223$  y  $H_t(\text{máx}) = 2,136$ . Posterior a  $a = 1$  en el caso unidimensional se tiene que  $H_t(\text{mín})=1,213$  y  $H_t(\text{máx})=1,393$  y con dos dimensiones y una interacción local de cuatro vecinos, se obtiene  $H_t(\text{mín})=1,109$  y  $H_t(\text{máx})=1,200$ .

En contraste, para el modelo bidimensional con vecindad de Moore (8 vecinos), se encuentra únicamente una región tipo Pareto cuya riqueza mínima promedio es  $H_t(\text{mín})=1,041$  y la riqueza máxima promedio encontrada es  $H_t(\text{máx}) = 1,701$ .

Nótese que la riqueza promedio en el sistema puede ser afectada, tanto por los valores de los parámetros, como por la geometría del sustrato espacial donde ocurren las interacciones.



**Figura 4.** Exponentes característicos en las distribuciones tipo BG (línea continua) y tipo P (línea punteada) en función del parámetro  $a$ . (a) red unidimensional; (b) red bidimensional con 4 vecinos; (c) red bidimensional con 8 vecinos. En todos los casos  $r = 10$ ,  $N = 10^5$ ,  $t = 10000$ . Las regiones BG y Pareto que no cumplen con el criterio  $|\beta| \geq 0,96$  están acotadas.



**Figura 5.** Campo medio  $H_t$  en función del parámetro  $a$ . (a) red unidimensional; (b) red bidimensional con 4 vecinos; (c) red bidimensional con 8 vecinos. En todos los casos  $r = 10$ ,  $N = 10^5$ ,  $t = 10000$ . Las regiones BG y Pareto que no cumplen con el criterio  $|\beta| \geq 0,96$  están acotadas.



**Coefficiente de Gini**

La figura 6 muestra el coeficiente de Gini,  $G_t$ , calculado con la ecuación (3), en función del parámetro  $a$ , para distintas redes. Se aprecia que el comportamiento del coeficiente de Gini es cualitativamente muy similar en el rango  $a \in (0 - 0,82)$ .

Separando la influencia de la topología en las distintas redes, se observa en la figura 7 que los valores máximos y mínimos del coeficiente de Gini,  $G_t$  en las regiones BG son para el caso unidimensional:  $G_t(\text{mín}) = 0,479$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,633$ , en el caso bidimensional con cuatro vecinos se obtiene que  $G_t(\text{mín}) = 0,507$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,723$  y finalmente en dos dimensiones y un entorno local de ocho vecinos se presenta un  $G_t(\text{mín}) = 0,576$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,783$ .

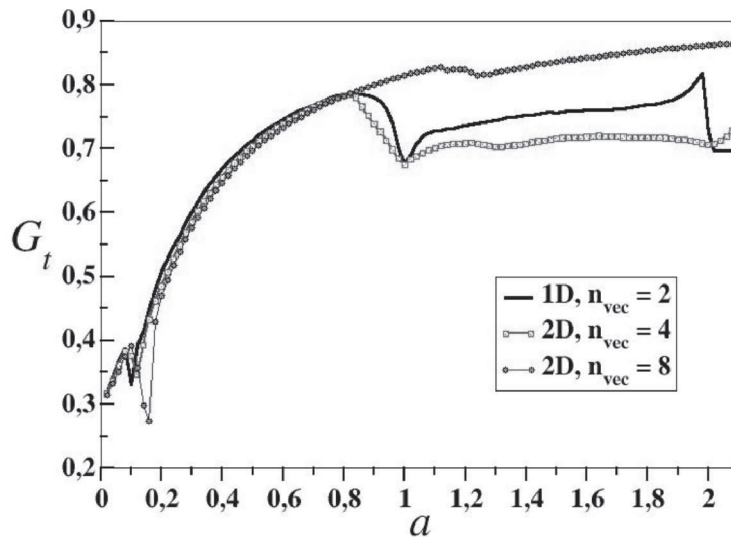
Para las regiones cuyo comportamiento sigue la ley de Pareto, y tomando como referencia dicha zona antes de  $a=1$ , en el caso unidimensional se tiene que  $G_t(\text{mín}) = 0,688$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,703$  y, con dos dimensiones y una interacción local de cuatro vecinos, se obtiene

$G_t(\text{mín}) = 0,678$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,742$ . Posterior a  $a = 1$  en el caso unidimensional se tiene que  $G_t(\text{mín}) = 0,691$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,780$  y con dos dimensiones y una interacción local de cuatro vecinos, se obtiene  $G_t(\text{mín}) = 0,683$  y  $G_t(\text{máx}) = 0,714$ .

**DISCUSIÓN DE RESULTADOS**

De la figura 2 se obtiene una distribución exponencial  $P(x) \sim e^{-\mu x}$  del tipo BG, con un exponente característico  $\mu = 0,2593$ . Haciendo una analogía termodinámica para este tipo de comportamiento exponencial, se puede definir una especie de “temperatura”,  $T = 1/\mu$ , que para este caso particular, toma el valor  $T = 3,84$ .

Como ya se ha mostrado en la figura 3, es posible encontrar regiones cuyo comportamiento obedece a una ley de potencia  $P(x) \sim x^{-\alpha}$  en el espacio de parámetros ( $a, r$ ). El exponente  $\alpha$  de esta distribución, para este caso en concreto, resulta ser  $\alpha = 2,84$ , el cual está en acuerdo con los exponentes característicos de Pareto derivados de datos económicos reales.



**Figura 6.** Coeficiente de Gini vs.  $a$  para  $t = 10^4$ , calculado sobre el promedio de 100 realizaciones para cada valor de  $a$ , para distintas redes, con  $r = 10$ ,  $N = 10^5$ .

Se observa en términos cualitativos que la riqueza media promedio (Figura 5) y el coeficiente de Gini (Figura 7) están relacionados. En las regiones de comportamiento BG se manifiesta que la riqueza media promedio es mayor con respecto a las zonas Pareto, y los correspondientes coeficientes de Gini indican que la riqueza está mejor distribuida en las regiones BG que en su contraparte, resultado que está acorde con lo reportado en la literatura. En lo que respecta a la dimensionalidad, se encuentra en la distribución tipo BG, un desplazamiento de esta región hacia valores mayores del parámetro  $a$ , y un ensanchamiento en la medida que la dimensionalidad y el número de vecinos interactivos aumenta.

Nuestros resultados muestran que es posible, con un modelo determinista de mapas acoplados, obtener distribuciones de probabilidad de riquezas similares a las encontradas en sociedades reales.

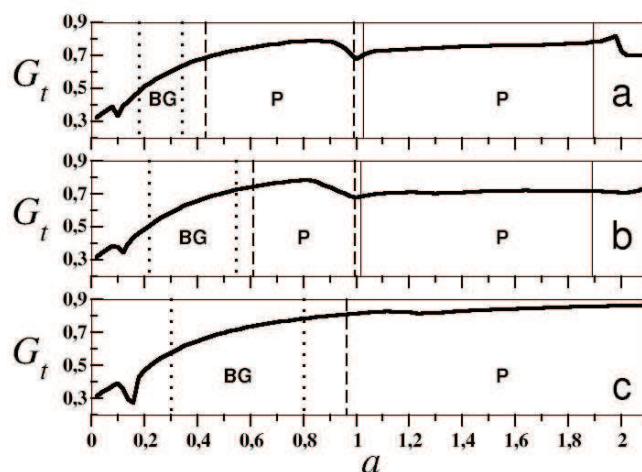
## CONCLUSIONES

Hemos estudiado un modelo determinista, local y homogéneo, conceptualmente simple y con ingredientes mínimos, que permite capturar la fenomenología básica de interacciones económicas y que conduce de un modo natural a las distribuciones de riqueza observadas en sociedades reales. Este modelo consiste en un sistema dinámico espaciotemporal descrito por una red de mapas acoplados en una o dos dimensiones.

En contraste con modelos previos que involucran aleatoriedad y heterogeneidad en los agentes económicos, en nuestro modelo las interacciones locales (la “microeconomía”) determina completamente las características macroscópicas del sistema; es decir, la macroeconomía constituye un comportamiento colectivo emergente. Como consecuencia, fenómenos como la desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema surgen como resultado de procesos dinámicos que tienen lugar a nivel local.

Nuestros resultados sugieren que en sistemas de agentes económicos interactivos se pueden conseguir distintas regiones de parámetros en las cuales la distribución de riqueza manifiesta comportamientos tipo exponencial (BG) o leyes de potencia (Pareto), los cuales han sido observados en sistemas económicos reales. Por otro lado, se evidencia el rol que juega la conectividad de cada agente con su entorno en el surgimiento de comportamientos colectivos en el sistema.

Entre las futuras extensiones de este modelo está la posibilidad de modificar la regla de acoplamiento entre los mapas para encontrar los dos tipos de distribución de riqueza coexistiendo para los mismos valores de parámetros, con una distribución exponencial BG para los agentes con ingresos bajos y medios, y una distribución de Pareto para aquellos con ingresos altos, tal como se observa en datos económicos reales (Yakovenko, 2007).



**Figura 7.** Coeficiente de Gini vs.  $a$ , indicando las regiones BG y Pareto. (a) red unidimensional; (b) red bidimensional con 4 vecinos; c) red bidimensional con 8 vecinos. En todos los casos  $r = 10$ ,  $N = 10^5$ . Las regiones BG y Pareto que no cumplen con el criterio  $|\beta| \geq 0,96$ .

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Decanato de Investigación de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET), mediante los proyectos 04-001-2006 y 04-002-2006. J.G.-E. agradece al Decanato de Investigación y Vicerrectorado Académico de la UNET por el financiamiento obtenido para viajes. J.G.-E. y R.L.-R. agradecen el apoyo del BIFI, Universidad de Zaragoza, y de la Asociación Iberoamericana de Postgrado (AUIP), y del proyecto DGICYTFIS2006-12781-C02-01, España. M.G.C agradece el apoyo del Consejo de Desarrollo, Científico, Tecnológico y Humanístico y de las Artes, Universidad de los Andes, Mérida, a través del proyecto C-1692-10-05-B.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANGLE, J. The inequality process as a wealth maximizing process, *Physica A*. 367, 388-414, 2006.
- AUSLOOS, M.; CLIPPE, P. y PEKALSKI, A. *Physica A*. 324, 330-337, 2003.
- BOUCHAUD, J. P. y POTTERS, M. *Theory of Financial Risk*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- CHAKRABORTI, A. y CHAKRABARTI, B. Statistical mechanics of money: How saving propensity affects its distribution, *Eur. Phys. J. B* 17:167-170. 2000.
- CHATTERJEE, A., CHAKRABARTI, B. y MANNA, S. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity, *Physica A*. 335:155-163. 2004.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Modeling of Complex Systems: Seventh Granada Lectures, AIP Conference Proceedings 661, New York. pp. 180-183. 2003.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Statistical mechanics of money, *Eur. Phys. J. B*. 17. 723-729, 2000.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States, *Physica A*. 299. 213-221. 2001a.
- DRAGULESCU, A. y YAKOVENKO, V. Evidence for the exponential distribution of income in the USA, *Eur. Phys. J. B*. 20. 585-589. 2001b.
- GONZÁLEZ-ESTÉVEZ, J.; COSENZA, M.; LÓPEZ-RUIZ, R. y SÁNCHEZ, J. Pareto and Boltzmann-Gibbs behaviors in a deterministic multiagent system, *Physica A*. 2387/18 pp. 4637-4642. 2008.
- KANEKO, K. Ed., Coupled map lattices, focus issue of *Chaos* 2. 279-407. 1992.
- KLASS, O.; BIHAM, O.; LEVY, M.; MALCAI, O. y SOLOMON, S. The Forbes 400 and the Pareto wealth distribution, *Econ. Lett.* 90:290-295. 2006.
- KLASS, O.; BIHAM, O.; LEVY, M.; MALCAI, O. y SOLOMON, S. The Forbes 400, the Pareto power-law and efficient markets, *Eur. Phys. J. B* 55:143-147. 2007.
- LEVY, M. y SOLOMON, S., New evidence for the power-law distribution of wealth, *Physica A* 242, 90-94, 1997.
- LÓPEZ-RUIZ, R.; SAÑUDO, J. y CALBET, X. Geometrical derivation of the Boltzmann factor, arXiv:0707.4081, para aparecer en *Am. J. Phys* 76, 780-781. 2008.
- LÓPEZ-RUIZ, R.; GONZÁLEZ-ESTÉVEZ, J.; COSENZA, M. y SÁNCHEZ, J. An economic model of coupled exponential maps, Proceedings of the NOMA'07 Conference, Organizer LATTIS-INSIA, Toulouse University. pp. 54-56, 2007b.
- MANTEGNA, R. y STANLEY, H. *An introduction to Econophysics*, Cambridge Univ. Press, 2000.
- PARETO, V. *Cours d'Economie Politique*, Vol. 2, F. Pichou, Lausanne, 1897.
- REED, W. *Econ. Lett.* 74. 15- 19. 2001.
- RODRÍGUEZ - ACHACH y HUERTA QUINTANILLA, R. The distribution of wealth in the presence of altruism in simple economic models, *Physica A*. 361:309-318. 2006.
- SÁNCHEZ, J. y LÓPEZ-RUIZ, R. A model of coupled maps for economic dynamics, *Arxiv.nlin*.0507054, 2005.
- SÁNCHEZ, J.; GONZÁLEZ-ESTÉVEZ, J.; LÓPEZ - RUIZ, R. y COSENZA, M. A model of coupled maps for economic dynamics, *Eur. Phys. J. Special Topics*. 143: 241-243. 2007.
- SOUMA, W. Universal structure of the personal income distribution, *Fractals* 9:463-470, 2001.
- SOUMA, W. *Physics of Personal Income*. In: Takayasu, H. (Ed.) *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics*. Springer-Verlag, Tokyo. pp. 343-352. 2002.
- VOIT, J. *The statistical mechanics of Financial Markets*, Springer Verlag. 2002.
- YAKOVENKO, V. *Econophysics, statistical mechanics approach to*, preprint *Arxiv*:0709.3662. 2007.