



Optimización de la Conectividad de Redes de Mapas Acoplados Mediante un Algoritmo Genético

Ricardo Estévez y Kay Tucci

Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias. SUMA - CeSiMo
Mérida, 5101. Venezuela

kay@ula.ve

Resumen

La topología de interconexión de los sistemas complejos determina, en buena medida, el comportamiento macroscópico de los mismos. Este hecho hace pensar que existe algún tipo de red cuya conectividad puede maximizar o minimizar el valor de ciertos parámetros de orden del sistema. Para estudiar esta posibilidad se modifican las características del grafo de interconexión de la red mediante un algoritmo genético que, partiendo de una población inicial de redes de mapas acoplados, crea nuevas redes. En particular, se emplean redes de mapas logarítmicos acoplados con dinámica caótica de sus elementos y el parámetro de orden a minimizar es una función que involucra la desviación estándar y el número de enlaces promedio de los estados de los mapas. Para implementar el algoritmo genético se creó un operador genético que permite combinar matrices de acoplamiento para obtener una nueva generación de redes. Una vez que los mejores individuos de la población converjan, se caracterizan buscando propiedades topológicas comunes.

La Red de Mapas Acoplados

Para este trabajo usaremos una red de mapas acoplados con acoplamiento difusivo, compuesta por $N = 5000$ nodos

$$x_i(t + 1) = (1 - \epsilon)f(x_i(t)) + \frac{\epsilon}{N_i} \sum_{j \in \nu_i} f(x_j(t)) , \quad (1)$$

La fuerza del acoplamiento se fijó en $\epsilon = 0.41$, de forma tal que los individuos poco aptos no llegasen a sincronizarse.

Se usa es el logarítmico $f(x)$

$$x_{t+1} = f(x_t) = b + \ln \|x_t\| , \quad b = -0.7 . \quad (2)$$

La sincronización de los elementos se caracteriza mediante promedio temporal $\langle \sigma \rangle$ de la desviación estándar instantánea de los estados del sistema

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}(t) - x_i(t)}{N}} , \quad \bar{x}(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) . \quad (3)$$

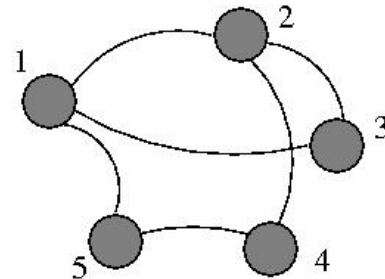
La Matriz de Adyacencia

Para el proceso de optimización se define como el genotipo del individuo a la matriz de adyacencia del grafo, de tamaño $N \times N$, definida como

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ si } j \in \nu_i \\ 0 & , \text{ de lo contrario} \end{cases} ; \forall i, j . \quad (4)$$

El tipo de grafos utilizados en este trabajo son no dirigidos y sin bucles por lo que la matriz de adyacencia debe cumplir con $M_{ij} = M_{ji}$ y $M_{ii} = 0$ respectivamente.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Algoritmo Genético

Población Inicial: 100 individuos de tamaño $N = 5000$

Tipo	Aleatorias	Regulares	Small World	Árbol	Fractales
Cantidad	80	5	5	5	5
Parámetros	$5 \leq \bar{k} \leq 15$	$1 \leq d \leq 5$ $1 \leq \kappa \leq 5$	$1 \leq d \leq 5$ $1 \leq \kappa \leq 5$ $p \in [0, 1]$	$1 \leq r \leq 10$	$1 \leq d \leq 5$

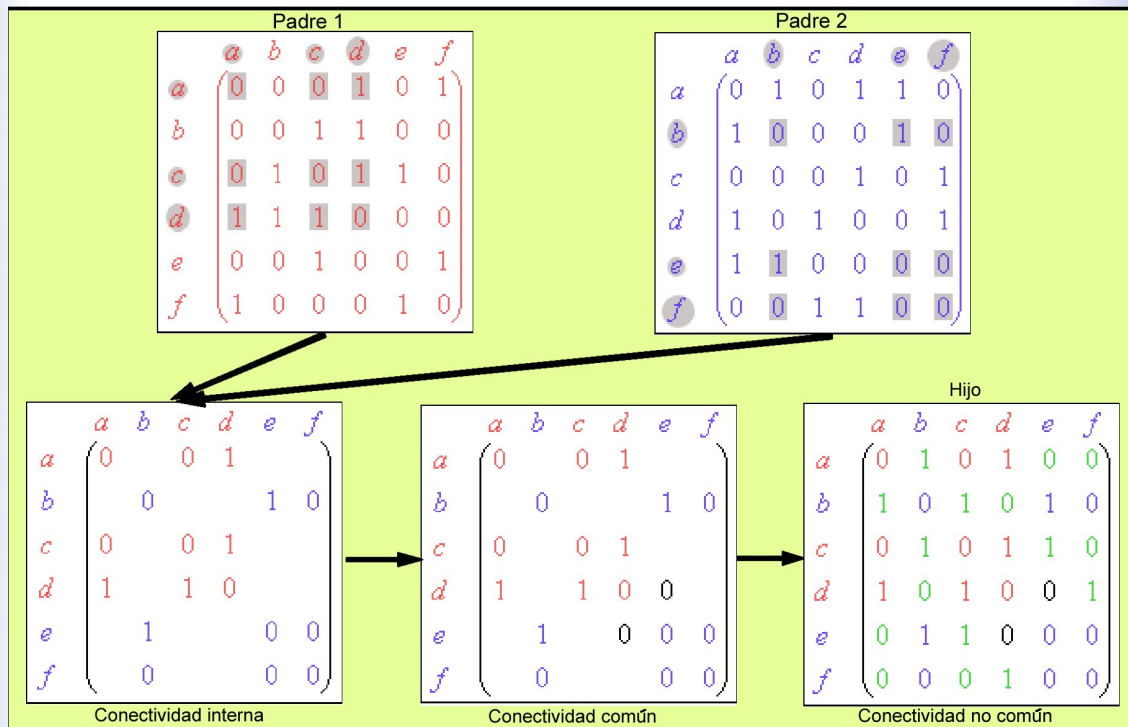
Nueva Población:

- 10 mejores
- 10 mutaciones de los 10 mejores
- 10 cruce de los 10 mejores con los 10 peores
- 10 cruce de los 10 mejores con 10 de los 80 del centro
- 35 cruce de los 80 individuos del centro
- 25 inmigrantes. 5 de cada tipo de red

Los cruces tienen probabilidad de mutación de 0.05 del 0.01 de sus genes

Algoritmo Genético

Recombinación o Cruce



Algoritmo Genético

Función Objetivo:

$$\phi_1 = \langle \sigma \rangle \quad (5)$$

$$\phi_2 = \langle \sigma \rangle + (\bar{k} \times 10^{-5}) . \quad (6)$$

Caracterización de los grafos:

- Coeficiente de agrupamiento

$$C = \frac{3 \sum_{k>j>i} M_{ij} M_{ik} M_{jk}}{\sum_{k>j>i} (M_{ij} M_{ik} + M_{ji} M_{jk} + M_{ki} M_{kj})} , \quad (7)$$

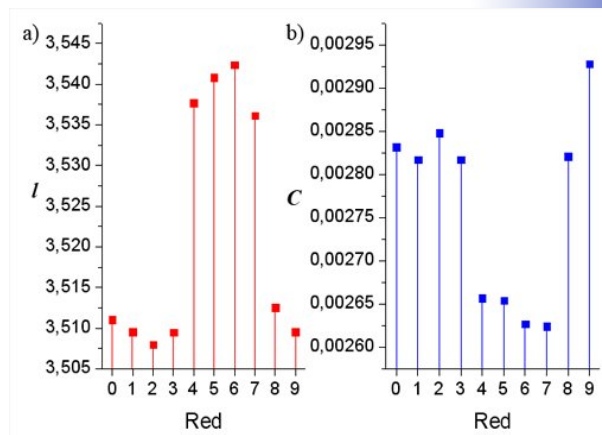
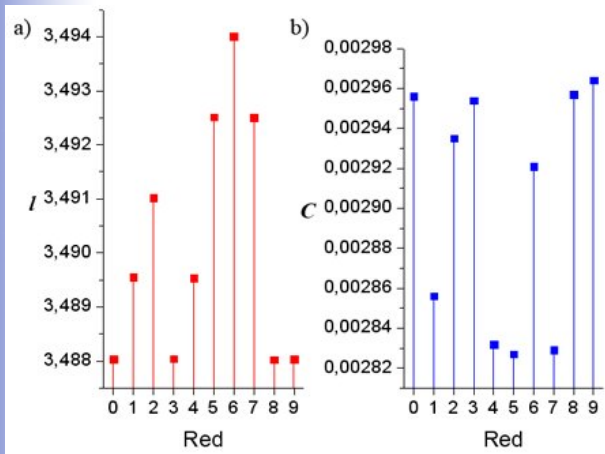
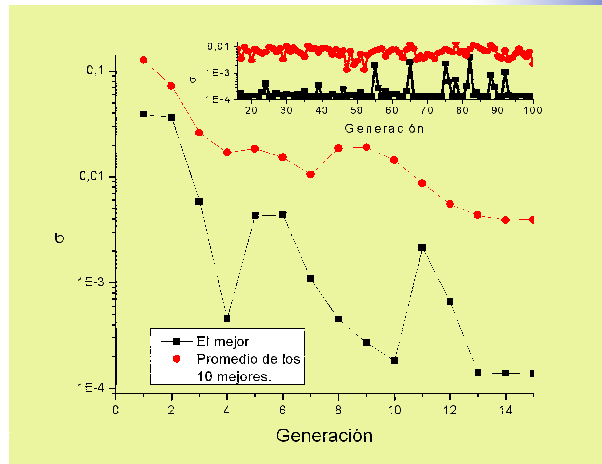
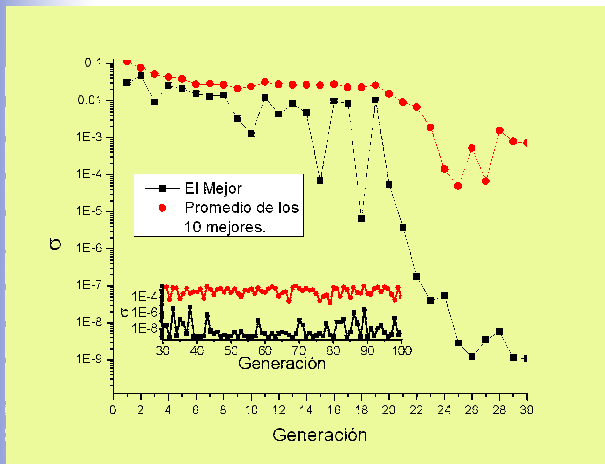
- Longitud característica

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij} \quad , \quad d_{ij}: \text{distancia más corta entre } i \text{ y } j. \quad (8)$$

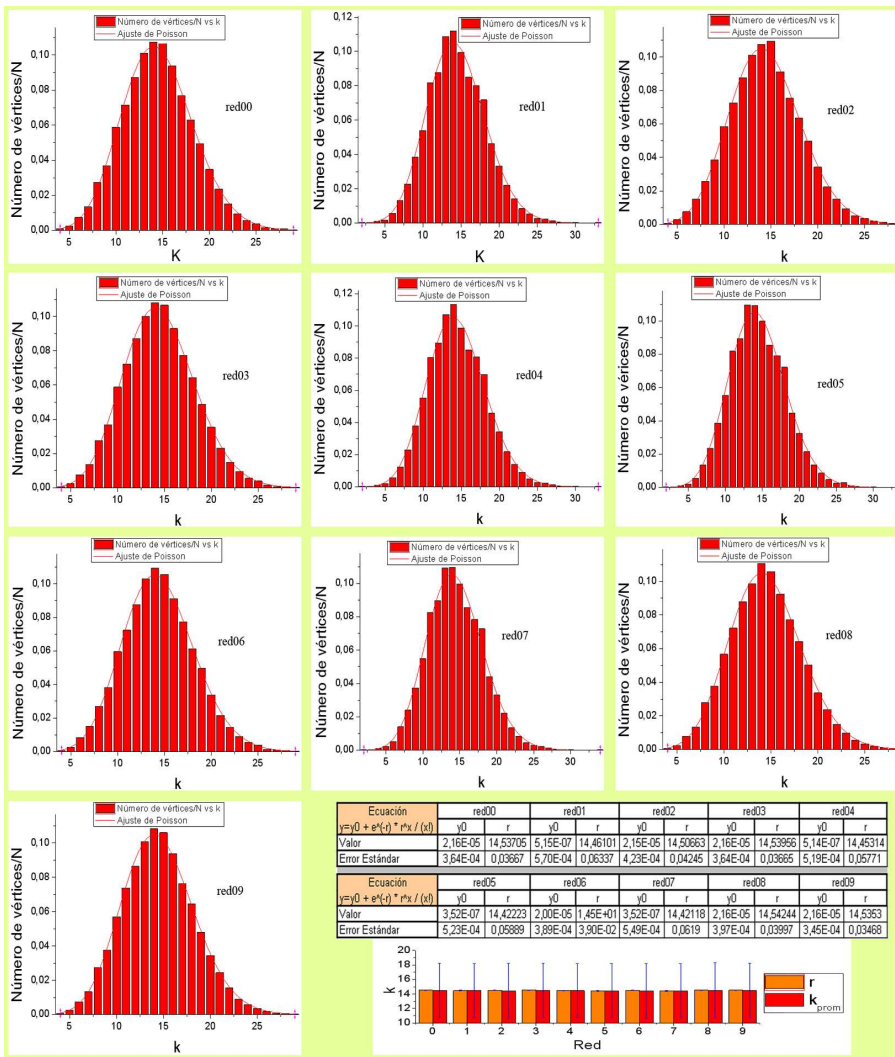
- El grado de cada vertice k_i y su distribución

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{N} \quad , \quad k_{max} \quad \text{y} \quad k_{min} \quad (9)$$

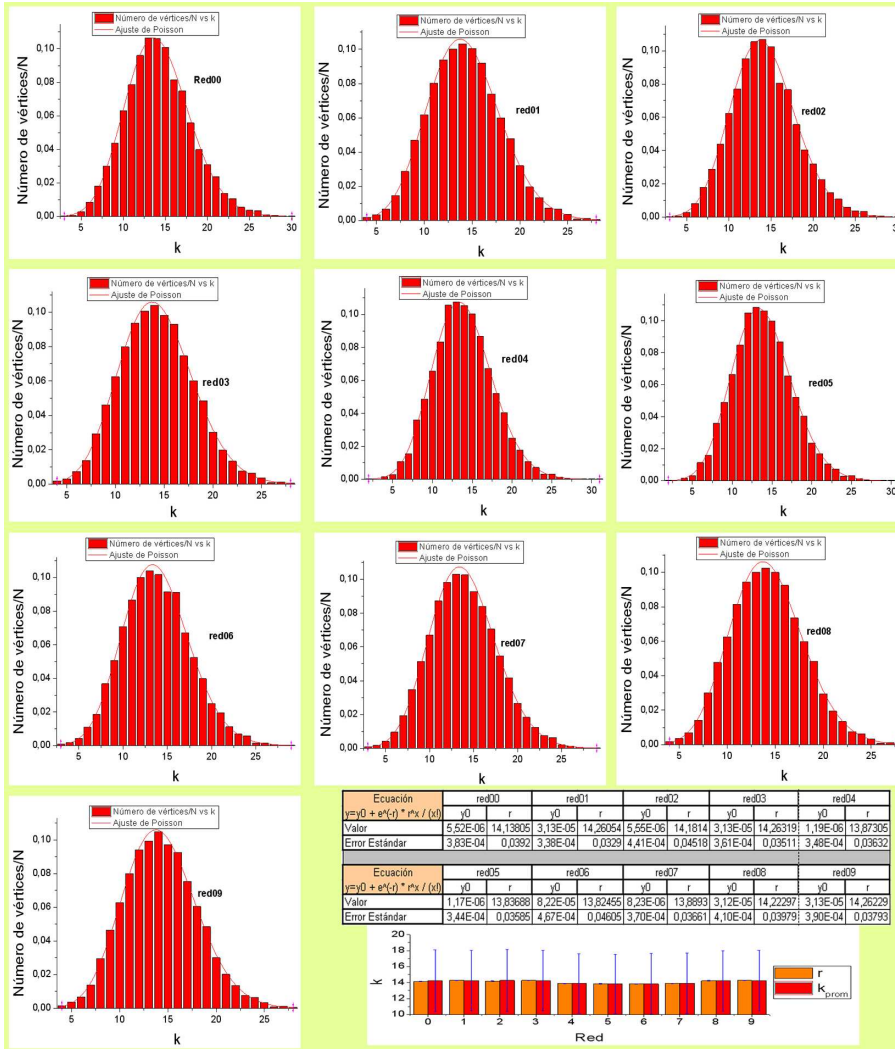
Resultados



Resultados



Resultados



Conclusiones

El proceso de optimización mediante algoritmo genético utilizado en este trabajo dió como resultado redes cuya topología permite que surja el fenómeno de sincronización en redes de mapas acoplados con más facilidad.

Con el conjunto de parámetros usados el estudio de las redes resultantes, caracterizadas por medio de la longitud característica, el coeficiente de agrupamiento y la distribución de grado de los vértices de cada red, son aleatorias del modelo de Erdős-Rényi.

El uso de diferentes funciones objetivo altera ligeramente el valor de \bar{k} pero no el tipo de red resultante.

Usando el mismo modelo de algoritmos genéticos se puede buscar las características topológicas de las redes que maximicen o minimicen otras propiedades colectivas emergentes como por ejemplo la formación de dominios, la separación de fases, el surgimiento de turbulencia, entre otras. También es posible utilizar otros caracterizadores de la topología de los grafos además de la longitud característica, el coeficiente de agrupamiento y la distribución de los grados de los vértices; como por ejemplo la vulnerabilidad, el grado de bipartividad, la dimensionalidad fractal, entre otros.

Referencias

- [1] K. Kaneko, *Period doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled map lattices*, Prog. Theor. Phys., 72 480-486, 1984.
- [2] I. Waller and R. Kapral, *Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators*, Phys. Rev., A30 2047-2055, 1984.
- [3] O. Alvarez-Llamoza, K. Tucci, M. G. Cosenza, and M. Pineda, *Random global coupling induces synchronization and nontrivial collective behavior in networks of chaotic maps*, arXiv:nlin/0612010v1 [nlin.CD] 5 Dec 2006.
- [4] M. Barahona and L. M. Pecora, *Synchronization in small-world systems*, Phys. Rev. Lett, vol. 89, no. 5, 054 101, 2002.
- [5] Jesús Gómez-Gardenes, Yamir Moreno, Alex Arenas, *Paths to Synchronization on Complex Networks*, arXiv:cond-mat/0608314v3 [cond-mat.stat-mech] 31 Jan 2007.
- [6] H. Hong, M. Y. Choi, and Beom Jun Kim, *Synchronization on small-world networks*, arXiv:cond-mat/0110359v1 [cond-mat.dis-nn] 18 Oct 2001.
- [7] Luca Donetti, Pablo I. Hurtado, Miguel A. Munoz, *Network synchronization: Optimal and Pessimal Scale-Free Topologies*, arXiv:0710.4886v1 [cond-mat.dis-nn] 25 Oct 2007.
- [8] F. Sorrentino, M. di Bernardo, G. Huerta Cuellar, S. Boccaletti, *Synchronization in weighed scale-free networks with degree-degree correlation*, arXiv:cond-mat/0611653v1 [cond-mat.dis-nn] 26 Nov 2006.
- [9] P. Erdos y A. Rényi, *On the evolution of random graphs*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci, 5:17-61, 1960.
- [10] P. Erdos y A. Rényi, *On the strenght of connectedness of a random graph*, Acta Mathematica Scientia Hungary, 12:261-267, 1961.
- [11] M. G. Cosenza y J. González, *Synchronization and Collective Behavior in Globally Coupled Logarithmic Maps*, Progress of Theoretical Physics Vol. 100 No. 1, 1998.
- [12] L. da F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso y P. R. Villas Boas, *Characterization of Complex Networks: A Survey of measurements*, arXiv:cond-mat/0505185 v5 16 Aug 2006.