



Universidad de Los Andes
Mérida - Venezuela

Postgrado en Física Fundamental

Área de Caos y Sistemas Complejos

**Caracterización de la complejidad en señales
electroencefalográficas**

Trabajo de grado presentado ante la ilustre

Universidad de Los Andes

como requisito parcial para optar al Título de:

Magister Scientiae en Física Fundamental

Presentado por

Lic. Miguel Ángel Escalona Morán

Tutor

Dr. Mario Cosenza

Mérida, Mayo del 2006

He divagado sobre predicción, incertidumbre, secretos o transparencia en el psicoanálisis, la cultura, la escritura y la economía. Mi conclusión es contundente. Quiero vivir en un mundo con cierto grado de no linealidad y con secretos. Ambas cosas generan sorpresas, y la esperanza de alguna sorpresa concreta conforma mi mundo íntimo.

Pero alegrémonos porque eso es lo que en realidad tenemos, aunque el público igual prefiera las novelas lineales y aunque nuestras comunicaciones digitales queden registradas.

Juan Urrutia Elejalde; Linealidad y Secretos.

*A quienes me han amado, enseñado, apoyado, ayudado y rezado
por mí, porque se han convertido en parte de todo cuanto hago.*

Agradecimientos

Esta tesis constituye un nuevo logro en este transitar de mi carrera profesional. No sólo representa la culminación de una etapa, sino que también representa la adquisición de cierta madurez en mi pensamiento científico.

En estos pocos párrafos quiero agradecer los consejos, la ayuda y el afecto, de todos aquellos que forman parte del grupo de *los caóticos*, en especial a mi tutor Profesor Mario Cosenza que no sólo ha sido un orientador en el trabajo, sino también una persona que se ha preocupado por el futuro de las carreras profesionales de sus estudiantes.

Quiero agradecer muy especialmente al Profesor Pedro García, por todo su tiempo y todas las discusiones de intenso pensamiento en las que estuvimos envueltos durante estos últimos cuatro meses.

Por último pero no menos importante, quiero agradecer al Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (FONACIT) por su apoyo financiero para la realización de mis estudios de maestría.

Estoy seguro que se me queda un montón de gente en el tintero pero a estas alturas las palabras valen su peso en oro, así que envío mi mas sincero agradecimiento a ese tintero lleno de gente buena.

A todos, **GRACIAS**

Resumen

La búsqueda de maneras de caracterizar la complejidad de estructuras y patrones emergentes en sistemas compuestos por muchos elementos interactivos ha sido un foco de atención en la física y en muchas otras áreas de las ciencias en tiempos recientes. En este trabajo hemos desarrollado un algoritmo para calcular en forma práctica la complejidad de un sistema basado en la definición de complejidad estadística introducida por Lopez-Ruiz, Mancini y Calbet (LMC). Mediante este algoritmo, hemos calculado la complejidad de señales electroencefalográficas (EEG) multicanales. Hemos utilizado el método de Análisis de Componentes Principales (PCA) para reducir la dimensionalidad de las señales. Las componentes principales obtenidas son luego usadas para calcular la complejidad LMC. Aplicamos este método para caracterizar señales EEG de 10 sujetos sanos y 30 pacientes epilépticos. Los valores de complejidad obtenidos permiten establecer diferencias relevantes entre estos grupos de individuos y demuestran que la patología epiléptica está asociada a un estado de menor complejidad cerebral que el caso de los sujetos sanos. Para estudiar la complejidad asociada al comportamiento colectivo del cerebro, hemos obtenido el campo medio instantáneo de cada señal EEG y hemos calculado la complejidad LMC a partir de esta variable para los mismos grupos de individuos. En este caso las diferencias de valores de complejidad entre los pacientes epilépticos y los sujetos sanos también son significativas. Este resultado implica que cantidades globales como la media del EEG contienen información relevante acerca del comportamiento colectivo del cerebro. Para interpretar estos resultados, hemos empleado un modelo de red de mapas caóticos globalmente acoplados, en el cual ocurre comportamiento colectivo no trivial, es decir comportamiento colectivo ordenado coexistiendo con caos local. La complejidad de la red se ha calculado como función de la intensidad de acoplamiento entre los elementos, en el caso en que éstos son homogéneos

y cuando son heterogéneos. Se encuentra que la complejidad del sistema aumenta cuando emerge un comportamiento colectivo no trivial y que esa complejidad varía en distintos rangos del parámetro de acoplamiento. Esto sugiere que los valores mayores de complejidad obtenidos en sujetos sanos en relación con pacientes epilépticos pueden estar relacionados con la presencia de comportamientos colectivos cerebrales más organizados en el primer grupo de individuos.

Nuestros resultados muestran que los conceptos y herramientas desarrolladas en el estudio de los sistemas complejos pueden tener amplia aplicación y, en particular, pueden servir como mecanismos complementarios para el diagnóstico y la investigación de sistemas fisiológicos, incluyendo patologías cerebrales.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Introducción	1
1. Información, desequilibrio y complejidad	8
1.1. La información de Shannon	9
1.2. Complejidad LMC	10
1.2.1. Ejemplos	12
2. Electroencefalografía y patología epiléptica	15
2.1. Examen electroencefalográfico	16
2.1.1. Electroodos	17
2.1.2. Disposición de electrodos	17
2.2. Patología epiléptica	19
2.3. Nomenclatura de las ondas del EEG	20
2.4. Características de la obtención de las señales EEG	21
3. Medidas de complejidad en señales EEG	22
3.1. Complejidad estructural	22
3.1.1. Estudio sobre el tamaño de σ	23
3.1.2. Estudio sobre la cantidad de dimensiones	24
3.1.3. Estudio sobre el número de estados: <i>escala</i>	24
3.1.4. Complejidad de los datos EEG	26

4. Comportamiento colectivo emergente	29
4.1. Complejidad en sistemas con comportamiento colectivo emergente . .	29
4.1.1. Discusión	34
Conclusiones	36
Bibliografía	39
A. Análisis de componentes principales	42
A.1. Fundamentos del método	42
A.1.1. Kernel PCA no lineal	43
B. Glosario para físicos	44

I think the next century will be the century of complexity.

Stephen Hawking. Enero 2000.

Introducción

Hasta mediados del siglo pasado, los científicos aprendieron a comprender la realidad a través de simplificaciones y análisis. El éxito del método reduccionista en el descubrimiento de los componentes de la materia y de las leyes de interacción entre estos componentes fue espectacular, especialmente en la Física. Esto motivó la posición filosófica del reduccionismo en ciertos sectores; la idea de que la meta de la Física consiste principalmente en encontrar las leyes fundamentales que deben obedecer todos los fenómenos que involucran materia y energía, y que la ignorancia de esas leyes solamente persiste en los extremos de lo muy pequeño y de lo muy grande [1]. Paradójicamente, la idea de que el conocimiento de la Naturaleza está cerca de ser completado parece ser recurrente en la historia de esta ciencia.

Hacia finales del siglo XX, la Física alcanzó una comprensión teórica y experimental del fenómeno de caos en sistemas dinámicos no lineales. El caos trajo dos lecciones importantes para el punto de vista reduccionista: sistemas simples pueden tener un comportamiento complejo, y el comportamiento puede ser independiente del contexto. El descubrimiento de la ubicuidad del caos en la Naturaleza, y de las propiedades universales de este fenómeno, han sentado las bases para el surgimiento de un punto de vista global y unificado para el estudio de sistemas no lineales extendidos, los cuales son capaces de manifestar comportamientos complejos. La investigación de sistemas de elementos interactivos distribuidos plantea actualmente profundas interrogantes, y a su vez ha revelado insospechadas relaciones entre problemas de distintas disciplinas, aparentemente inconexos.

El estudio de la auto-organización colectiva, o de las propiedades macroscópicas

emergentes, tanto espaciales como temporales, en sistemas de elementos dinámicos no lineales interactivos, es objeto de mucha atención en la literatura científica actual. Las observaciones recientes de comportamientos colectivos ordenados que surgen en una gran variedad de estos sistemas indican que estos comportamientos son, en general, no triviales y que además presentan características universales, independientemente del contexto, las cuales no pueden derivarse a partir del conocimiento de las propiedades de los elementos constituyentes, ni mediante consideraciones estadísticas. Fenómenos como la formación espontánea de estructuras, organización, patrones espaciales, sincronización y oscilaciones colectivas; ondas espirales; segregación y diferenciación, y crecimiento de dominios y de interfases, son ejemplos de procesos de auto-organización que ocurren en diversos sistemas, tales como sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc. Estos efectos colectivos son el resultado de la interacción y cooperación entre los elementos constituyentes de un sistema. Avances teóricos, computacionales y experimentales en este campo están contribuyendo aceleradamente al surgimiento de una descripción unificada de la dinámica de estos sistemas. El concepto general de *sistemas complejos* se ha aplicado a estos conjuntos de elementos capaces de generar estructuras o funciones globales ausentes a nivel local.

Los sistemas complejos [2, 3, 4, 5, 6] son sistemas de elementos interactivos cuyas propiedades colectivas no son susceptibles de ser derivadas trivialmente a partir del conocimiento o análisis reduccionista de las propiedades de sus elementos constituyentes. En lenguaje no técnico, se puede decir que sistemas complejos son aquellos donde el todo no es igual al agregado de sus partes.

Los comportamientos colectivos emergentes en ningún modo violan las leyes microscópicas, sino que no aparecen como consecuencias triviales de esas leyes. Los fenómenos emergentes en sistemas complejos pueden exhibir propiedades universales, independientemente de los detalles del sustrato en el cual éstos fenómenos se expresan. Consideremos, por ejemplo, las reglas que gobiernan las operaciones aritméticas elementales. Estas reglas no varían dependiendo del sistema físico (un computador) o biológico (un cerebro) en el cual se manifiestan, y por lo tanto son lógicamente independientes de las leyes físicas que rigen esos sistemas. Igualmente, un fluido turbulento y un cerebro son claramente muy diferentes a nivel microscópico, pero comparten un rasgo importante: ambos presentan la imposibilidad de predecir

la riqueza de sus dinámicas por una mera extrapolación del comportamiento de sus unidades básicas.

El principio de *emergencia* se ha convertido en la fundación filosófica de la ciencia contemporánea en su búsqueda de una interpretación unificada de los sistemas complejos, como anteriormente lo fue el reduccionismo para el descubrimiento de las interacciones fundamentales.

El empleo de conceptos y técnicas surgidas del estudio de sistemas complejos ha demostrado ser capaz de abordar problemas fuera de las fronteras tradicionales de las ciencias específicas.

En particular, existe mucho interés en el estudio de sistemas fisiológicos, especialmente el cerebro, desde el punto de vista de un sistema complejo. Con 1,5 kilogramos de materia suave y altamente convolucionada, alrededor de 100 billones de componentes neurales, cientos de trillones de interconexiones y muchos miles de kilómetros de cableado, el cerebro humano es frecuentemente descrito como el más complejo de los sistemas conocidos. Las implicaciones de este reconocimiento son que la función cognitiva está distribuída dentro del cerebro y que los mecanismos pueden variar de individuo a individuo.

El cerebro consiste en una red altamente interconectada de neuronas. El comportamiento dinámico de una neurona individual es simple; básicamente consiste en un elemento excitable no lineal. Cuando un estímulo actuando sobre la neurona alcanza un valor umbral, la neurona dispara un pulso eléctrico. Luego sigue un período de recuperación durante el cual no puede volver a dispararse aunque reciba otros estímulos. A partir de la señal de una neurona o de un grupo de neuronas, no pueden deducirse las funciones y propiedades colectivas sofisticadas del cerebro.

La Dinámica No Lineal como disciplina abre nuevas ventanas hacia la comprensión de los procesos cerebrales debido a que el sistema neuronal ciertamente involucra mecanismos no lineales a nivel microscópico [7]. Desde hace algún tiempo, ha habido un interés sustancial en estudiar las señales cerebrales, especialmente los electroencefalogramas (EEG), con métodos de la Dinámica No Lineal y del Caos determinista [8]. La conducta imprevisible de ciertos sistemas nerviosos macroscópicos, como aquéllos sondeados por el EEG humano, refleja los efectos de esos mecanismos no lineales subyacentes [9]. Varios grupos han reportado la existencia de caos de baja dimensión en el cerebro [9, 10].

Desde una perspectiva teórica, la identificación y caracterización de la no linealidad en el EEG conlleva a usar modelos matemáticos para describir el comportamiento dinámico del cerebro.

En esta tesis nos proponemos caracterizar cuantitativamente la complejidad de señales electroencefalográficas, mediante medidas de complejidad estadística recientemente introducidas. Como aplicación importante, calculamos la complejidad en EEGs provenientes de sujetos sanos y de pacientes epilépticos. Estas medidas permiten describir ciertos aspectos del funcionamiento del cerebro humano como un sistema dinámico complejo. Igualmente, pueden conducir al establecimiento de criterios que permitan discernir patologías cerebrales con métodos novedosos y proporcionar herramientas alternativas y complementarias para ayudar al diagnóstico de estas enfermedades.

Diversas definiciones operativas de complejidad han sido propuestas para cuantificar el grado de complejidad de un sistema, dependiendo de los aspectos colectivos o funcionales que se intentan caracterizar. Estas definiciones formalizan la idea intuitiva de que un sistema es complejo si resulta difícil describirlo adecuadamente. En general, estas definiciones caen en tres categorías:

1) *Complejidad algorítmica*, de uso frecuente en las ciencias computacionales, se refiere a la caracterización de la complejidad de un conjunto de datos como el programa más corto (medido en bits) que puede reproducir esos datos. En esta categoría se encuentran la complejidad algorítmica de Kolmogorov-Chaitin [11, 12], la complejidad de Lempel-Ziv [13], y la profundidad lógica de Bennett [14].

2) *Complejidad predictiva*, corresponde a la cantidad de información requerida para predecir un sistema. Esta categoría se basa en técnicas de análisis no lineal de series de tiempo para describir el flujo de información entre las partes del sistema. Este punto de vista enfatiza la interrelación o correlación entre los elementos constituyentes como una propiedad esencial de un sistema complejo. Ejemplos de este tipo son la medida efectiva de la complejidad de Grassberger [15], la complejidad basada en diversidad [16], la profundidad termodinámica [17], etc. En particular, se ha logrado establecer una relación directa entre el flujo de información entre los niveles macroscópico y microscópico de un sistema y el surgimiento de comportamientos colectivos no triviales [18].

2) *Complejidad estructural*, este punto de vista se enfoca en la emergencia de es-

estructuras o patrones macroscópicos en sistemas complejos. Un sistema complejo se encuentra a medio camino entre lo desordenado (un gas, por ejemplo), y lo ordenado (un cristal). Un sistema totalmente desordenado o aleatorio es estadísticamente invariante en el tiempo o en el espacio y no forma estructuras. Por otro lado, un sistema regular, ordenado en el espacio y/o el tiempo es fácilmente predecible o reproducible a partir del conocimiento de una parte del mismo. En un sistema complejo existen elementos de desorden (al menos aparente) que hacen difícil predecir la estructura global a partir de fragmentos de la misma. Al mismo tiempo, subsiste un orden subyacente dentro de esta estructura. Los sistemas complejos se caracterizan por exhibir variabilidad y diversidad. Según este punto de vista, la complejidad es máxima para valores intermedios del valor de entropía de un sistema. Por este motivo, las medidas de complejidad estructural están basadas en descripciones estadísticas.

Muchas de estas caracterizaciones de la complejidad se han calculado principalmente en modelos teóricos o computacionales y resultan imprácticas en situaciones experimentales. Por eso no se han efectuado muchas medidas de complejidad con datos reales.

En los últimos años, López-Ruiz, Mancini y Calbet (LMC) [19] propusieron una medida de complejidad estadística que refleja la complejidad estructural de un sistema y que resulta relativamente sencilla de calcular en la mayoría de los casos. La noción de la complejidad LMC, subsecuentemente desarrollada por López-Ruiz *et al.*, ofrece un novedoso punto de vista basado en la descripción estadística de los sistemas a una escala dada. En este esquema, el conocimiento de las leyes físicas que gobiernan la evolución dinámica en la escala específica debe ser usado para encontrar los estados accesibles de un sistema y su distribución de probabilidad. Este proceso indicaría el valor de la complejidad. En esencia, la complejidad LMC es una interpolación entre la información almacenada por el sistema y la *distancia a la equipartición* (medida de una jerarquía probabilística entre las partes observadas) de la distribución de probabilidad de sus estados accesibles; además, su principal cualidad consiste en ser un concepto intuitivo de complejidad, el cual ha demostrado ser satisfactoria para discernir situaciones reconocidas como complejas.

En este trabajo hemos implementado un algoritmo para calcular la medida de complejidad estadística propuesta por López-Ruiz, Mancini y Calbet, a partir de series de tiempo experimentales. Específicamente, calculamos la complejidad en se-

ñales electroencefalográficas en grupos de sujetos sanos y de pacientes diagnosticados con epilepsia. Esta medida sirve para describir la complejidad estructural del cerebro en distintas situaciones. Hasta donde tenemos conocimiento, esta medida de complejidad no ha sido efectuada con datos experimentales; de allí la importancia del presente trabajo. También hemos usado este algoritmo en modelos de mapas caóticos acoplados que exhiben comportamiento colectivo no trivial, lo que nos ha permitido establecer una relación directa entre la emergencia de orden colectivo y el aumento de complejidad en un sistema.

En el Capítulo 1 de esta tesis, se presenta una revisión del concepto de complejidad y de las propiedades que debe poseer una medida de esta cantidad. Se explica la definición de complejidad estadística LMC, así como los conceptos de información, entropía y desequilibrio.

El Capítulo 2 contiene una breve revisión de las técnicas electroencefalográficas usadas para obtener datos como los empleados en este trabajo. Se describen la práctica del examen de onda cerebral, los electrodos y número de canales usados y la disposición sistemática de los mismos sobre el cuero cabelludo, según el sistema 10 – 20. Por otra parte, se presenta la definición de una patología epiléptica, la clasificación de estas patologías y su diagnóstico. También se describe la base de datos utilizada en esta tesis.

En el Capítulo 3 aplicamos el método de Principal Components Analysis (PCA) a las señales EEG para reducir su dimensionalidad y así poder aplicar eficientemente el algoritmo de cálculo de las medidas de complejidad estadística LMC en esas señales. La complejidad de las señales EEG sugiere una diferencia entre el grupo de sujetos sanos y el grupo de pacientes epilépticos. Se encuentra que la complejidad LMC puede inclusive calcularse a partir de cantidades globales, como el valor promedio de las señales provenientes de los distintos canales del EEG y que esta medida también permite discernir entre sujetos sanos y pacientes epilépticos.

En el Capítulo 4 se calcula la complejidad LMC en modelos de mapas caóticos acoplados que exhiben comportamientos colectivos no triviales, como función de un parámetro que expresa la intensidad de acoplamiento entre los elementos. De este modo, se puede establecer una relación entre la emergencia de orden colectivo manifiesto en el campo medio y el aumento de complejidad en un sistema.

Finalmente, el Capítulo 5 contiene las conclusiones de este trabajo.

A manera de referencia, se incluyen un apéndice con una revisión del método Principal Components Analysis y un Glosario de términos electroencefalográficos para físicos.

*Antes del comienzo de un gran brillo,
debe existir caos.*

I Ching, Imagen # 3.

Capítulo 1

Información, desequilibrio y complejidad

La entropía crece sin cesar. El segundo principio de la termodinámica predice el decaimiento de todas las estructuras con el tiempo. Lo ordenado dejará de serlo tarde o temprano, dando paso al desorden. Pero aunque este principio es ciertamente general, a nuestro alrededor se agitan miles de sistemas complejos que de una forma u otra exhiben un alto grado de orden. La vida es el ejemplo más preeminente, pero incluso en los sistemas inorgánicos puede darse la aparición de orden en las situaciones menos esperadas. Pese a la aparente contradicción con la segunda ley de la termodinámica, que se aplica a sistemas cerrados en equilibrio, los sistemas que nos interesan son sistemas abiertos fuera del equilibrio que intercambian energía y materia con el exterior. Este intercambio tiene muchas veces un aspecto especial, pues lo que se intercambia es, de hecho, información. A partir de sistemas formados de elementos simples, alejados del equilibrio, la vida se autoorganiza de formas sorprendentes. La segunda ley siempre acaba ganando la batalla, pero durante ésta, muchas son las cosas que pueden ocurrir. Una de ellas es la emergencia espontánea de lo complejo.

1.1. La información de Shannon

La entropía juega un papel crucial en la física de sistemas macroscópicos en equilibrio. La distribución de probabilidad de los estados accesibles de un sistema puede ser hallada por principios de máxima entropía [20], las magnitudes macroscópicas y las leyes que las relacionan pueden ser calculadas con esta distribución de probabilidad por medio de técnicas de mecánica estadística. Este mismo esquema puede ser pensado para sistemas alejados del equilibrio, pero en este caso no tenemos un método para encontrar la distribución de probabilidades ni el conocimiento de las magnitudes relevantes que pueden predecir el comportamiento del sistema.

La información de Shannon o entropía H [21] puede aún seguir siendo usada como una magnitud en una situación general con N estados accesibles:

$$H = K \sum_{i=1}^N p_i \log p_i, \quad (1.1)$$

con K una constante real positiva, donde p_i satisface la condición de normalización $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Un sistema aislado en equilibrio presenta equiprobabilidad [26], $p_i = 1/N$ para todo i , entre sus estados accesibles y ésta es la situación de máxima entropía,

$$H_{max} = K \log N. \quad (1.2)$$

Sí el sistema se encuentra fuera del equilibrio, la entropía H puede ser expandida alrededor de este máximo:

$$\begin{aligned} H\{p_1, p_2, \dots, p_N\} &= K \log N - \frac{NK}{2} \sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N}\right)^2 + \dots \\ &= H_{max} - \frac{NK}{2} \cdot D + \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde hemos definido la cantidad $D = \sum_i (p_i - \frac{1}{N})^2$, a la cual llamaremos desequilibrio, y es un tipo de distancia desde la configuración actual del sistema al equilibrio. Si la expresión (1.3) es multiplicada por H , obtenemos

$$H^2 = H \cdot H_{max} - \frac{NK}{2} H \cdot D + K^2 f(N, p_i), \quad (1.4)$$

donde $f(N, p_i)$ es la entropía multiplicada por el resto de los términos de la expansión en serie de Taylor, los cuales presentan la forma $\frac{1}{N} \sum_i (Np_i - 1)^m$, con $m > 2$. Si ahora definimos $C \equiv H \cdot D$,

$$C = cte \cdot H(H_{max} - H) + K \bar{f}(N, p_i), \quad (1.5)$$

con $cte^{-1} = NK/2$ y $\bar{f} = 2f/N$. La idea de distancia para el desequilibrio es ahora más clara si vemos que D es la distancia real $D \sim (H_{max} - H)$ para sistemas en la vecindad de la equiprobabilidad. En un gas ideal, tenemos que $H \sim H_{max}$ y $D \sim 0$, entonces $C \sim 0$. Contrariamente, para el caso de un cristal $H \sim 0$ y $D \sim 1$, pero también $C \sim 0$. Estos dos sistemas son considerados como ejemplos clásicos de modelos simples y son extremos en una escala de desorden H o desequilibrio D . En la siguiente sección veremos que la complejidad LMC se basa en la expresión (1.5).

1.2. Complejidad LMC

De una manera intuitiva esperamos que lo complejo se encuentre a medio camino entre lo ordenado (el cristal perfecto, por ejemplo) y lo desordenado (el gas ideal). En la Fig. (1.1) se muestran tres ejemplos de sistemas, dos de ellos en los extremos de la complejidad y uno intermedio. En el caso (a), tenemos una estructura ordenada, fácilmente predecible (basta con observar una pequeña parte para hacerse una idea del comportamiento global) y lo mismo ocurre en (c), aunque ahora se trate de un sistema totalmente desordenado. En cambio, en (b) podemos ver un ejemplo de estructura compleja.



Figura 1.1: (a) Sistema ordenado (red regular). (b) Sistema *complejo*. (c) Sistema desordenado (aleatorio)

Existen elementos de desorden (al menos aparentemente) que hacen difícil predecir la estructura global a partir de fragmentos de la misma. Sin embargo, está claro que existe un orden subyacente dentro de esta estructura. Así, de manera intuitiva se espera que la complejidad muestre un comportamiento similar al mostrado en la Fig. (1.2), donde la complejidad es nula en los extremos y posee un cierto valor para

aquellos sistemas que se encuentran entre los extremos de orden y desorden. Este comportamiento asintótico es descrito por la cantidad C .

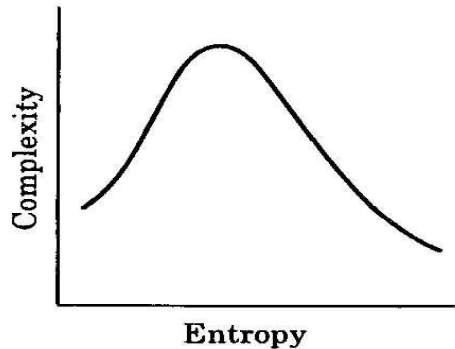


Figura 1.2: Comportamiento cualitativo esperado para una medida de la complejidad en función de la entropía.

Asumamos que a una cierta escala de observación un sistema tiene N estados accesibles $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ y una distribución de probabilidad $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$. Entonces, a este nivel de descripción, nuestro conocimiento de las leyes físicas que rigen el fenómeno, nos dan una noción de la distribución de probabilidad de los estados accesibles del sistema. Shannon y Weaver [21] demostraron, bajo las más elementales normas de consistencia, que la única función que dá cuenta de la información almacenada en un sistema es $H = -K \sum_{i=1}^N p_i \log p_i$. Es sencillo determinar que la información H contenida en un cristal es $H_c \sim 0$, mientras que para un gas aislado térmicamente $p_i \sim 1/N$ y entonces $H_g \sim K \log N$, lo cual representa la máxima información para un sistema de N estados. Cualquier otro sistema tendrá una cantidad de información entre estos dos extremos. Por otro lado, el desequilibrio D de un sistema puede ser tomado como una especie de distancia a una distribución equiprobable. Dos condiciones son requeridas para esta magnitud:

1. $D > 0$ para tener una medida positiva de la complejidad,
2. $D = 0$ en el límite de equiprobabilidad.

La solución más sencilla es sumar el cuadrado de la distancia de cada estado al estado de equiprobabilidad, así

$$D = \sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N} \right)^2.$$

Esta función será máxima para un cristal y cero para un gas ideal. Cualquier otro sistema tendrá un desequilibrio entre estos dos extremos. Entonces, LMC definen la complejidad como

$$C = H \cdot D = -\left(K \sum_{i=1}^N p_i \log p_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \left(p_i - \frac{1}{N}\right)^2\right) \quad (1.6)$$

Esta definición está acorde con los argumentos que de manera intuitiva debería poseer una medida de la complejidad de un sistema, ya que es cero para los dos sistemas extremos en la escala de orden y desorden (cristal perfecto y gas ideal), y cualquier otro sistema tendrá un comportamiento intermedio y por tanto $C > 0$. A diferentes escalas un número diferente de estados serán accesibles, esto es una diferente distribución de probabilidad, y por tanto valores diferentes para H y D . Así, la magnitud para medir la complejidad es dependiente de la escala, tal y como se espera. Veamos un ejemplo para ilustrar este punto: Un chip de computadora puede verse muy diferente a diferentes escalas, éste es un intrincado arreglo de elementos electrónicos a una escala microscópica, pero sólo es un conjunto de pines que sobresalen de una caja negra a una escala macroscópica.

Muchas nociones diferentes de complejidad han sido propuestas hasta ahora, principalmente en el contexto de ciencias computacionales y sociales, pero la mayoría de estas definiciones presentan tanto dificultades como problemas lógicos cuando se intentan generalizar en los sistemas. La mayor ventaja de la complejidad LMC es su generalidad y el hecho de que es operacionalmente simple y no requiere de una gran cantidad de calculos [22]. Esta ventaja ha sido evaluada en diferentes ejemplos, tales como el estudio de la evolución de C para un modelo simplificado de un gas, el "tetrahedral gas"[23], algunas expresiones para localización cuántica y entropía cuántica [24], algunos métodos para discernir complejidad en patrones bidimensionales [25], etc. A continuación mostraremos algunos ejemplos del calculo de la complejidad LMC.

1.2.1. Ejemplos

Complejidad en el ensamble canónico

Cada situación física está relacionada a una distribución específica de los estados microscópicos, así, un sistema aislado presenta equipartición, por hipótesis: los

microestados compatibles con una situación macroscópica son equiprobables [26], entonces, se dice que el sistema está en equilibrio. Para un sistema con un reservorio de calor en sus alrededores la probabilidad de los microestados asociada al equilibrio térmico sigue la distribución de Boltzmann. En general, el esquema establecido consiste en asociar una distribución de probabilidad de los estados a cada fenómeno. Sí el sistema presenta alguna distribución específica, se dice que se encuentra en un cierto tipo de equilibrio. Desde este punto de vista, la complejidad C puede ser asignada en cada sistema dependiendo de la descripción específica. Analicemos el comportamiento de C en un gas ideal en equilibrio térmico. En este caso, la probabilidad p_i de cada estado accesible está dada por la distribución de Boltzmann,

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Q_N},$$

donde Q_N es la función de partición del ensamble canónico,

$$Q_N = \int e^{-\beta E(p,q)} \frac{d^{3N} p d^{3N} q}{N! h^{3N}} = e^{-\beta A(V,T)}.$$

Acá $\beta = 1/\kappa T$ con κ como la constante de Boltzmann, T la temperatura, V el volumen, N el número de partículas, $E(p, q)$ el hamiltoniano del sistema, h es la constante de Planck y $A(V, T)$ es el potencial de Helmholtz. Dada esta distribución de probabilidad, los calculos de H y D son

$$H(V, T) = \left(1 + T \frac{\partial}{\partial T}\right) (\kappa \log Q_N) = S(V, T)$$

y el desequilibrio es

$$D(V, T) = e^{2\beta[A(V,T) - A(V,T/2)]}.$$

Nótese que la información de Shannon coincide con la entropía termodinámica S cuando K es identificada como κ . Sí un sistema verifica la relación $U = C_v T$ donde U es la energía interna y C_v el calor específico, la complejidad toma la forma

$$C(V, T) \sim cte(V) \cdot S(V, T) e^{-S(V,T)^2/\kappa}$$

lo cual está en total concordancia con la función propuesta en la Ec. (1.6).

Distribución normal

Supongamos un conjunto de estados continuo representado por la variable x cuya densidad de probabilidad $p(x)$ está dada por la distribución σ

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \quad (1.7)$$

Para el caso de distribuciones continuas, la información H está definida como [19]

$$H = -K \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx, \quad (1.8)$$

y el desequilibrio es

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} p^2(x) dx \quad (1.9)$$

Entonces, las expresiones para H y D , en este caso, son

$$H = K \left(\frac{1}{2} + \log(\sigma\sqrt{2\pi}) \right),$$

$$D = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}$$

por lo tanto, C resulta en

$$C = H \cdot D = \frac{K}{2\sigma\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} + \log(\sigma\sqrt{2\pi}) \right). \quad (1.10)$$

La condición adicional de que $H \geq 0$ impone que $\sigma \geq \sigma_{min} = (2\pi e)^{1/2}$. La complejidad máxima es alcanzada para un ancho determinado, $\bar{\sigma} = \sqrt{e/2\pi}$.

... our understanding of our minds is still primitive. The question is, when, if ever, will that situation change?

Peter Kramer; Listening to Prozac.

Capítulo 2

Electroencefalografía y patología epiléptica

El electroencefalograma (EEG) o examen de onda cerebral representa la serie de tiempo que traza el voltaje correspondiente a la actividad neurológica como una función del tiempo, en éste son captadas las oscilaciones de potencial que aparecen en la superficie corporal por un gran número de electrodos de manera simultánea y que son transmitidas a un intensificador con entrada poliómica y registradas después por canales de la máquina electroencefalográfica. Analizar señales electroencefalográficas en el computador ha sido una técnica en la investigación del cerebro. Muchos investigadores, por ejemplo, Duke *et al* (1991) [27], han demostrado que la evolución dinámica compleja del EEG se genera por regímenes caóticos.

Desde una perspectiva teórica, la identificación y caracterización de la no-linealidad en el EEG conlleva a usar las propiedades de modelos matemáticos para describir la conducta dinámica de un cerebro normal o patológico, y por lo tanto, nuestra comprensión de los procesos fisiológicos subyacentes. Muchos investigadores han usado métodos no-lineales para revelar que el EEG es generado por un proceso neuronal determinista. Algunos grupos han reportado que la no-linealidad encontrada es debida a un caos de dimensión baja [9, 10].

El EEG se utiliza para diagnosticar la presencia y tipo de trastornos convulsivos

y para evaluar las lesiones en la cabeza, tumores, infecciones, enfermedades degenerativas y alteraciones metabólicas que afectan al cerebro. También se usa para evaluar trastornos del sueño y para investigar períodos de pérdida del conocimiento. El EEG puede realizarse para confirmar la muerte cerebral en un paciente en estado de coma.

2.1. Examen electroencefalográfico

Las células del cerebro se comunican produciendo pequeños impulsos eléctricos. En un EEG se colocan electrodos en el cuero cabelludo sobre múltiples áreas del cerebro para detectar y registrar patrones de la actividad eléctrica y revisar en busca de cualquier anomalía.

El examen lo practica un técnico en una habitación especialmente diseñada que puede estar en un consultorio médico o en un hospital. Se le pide al paciente que se acueste boca arriba sobre una mesa o silla reclinable. El técnico coloca entre 16 y 25 discos metálicos planos (electrodos) en diferentes sitios del cuero cabelludo, los cuales se sostienen con un gel adhesivo. Los electrodos se conectan por medio de cables a un amplificador y a una máquina de registro.

La máquina de registro convierte las señales eléctricas en una serie de líneas ondeadas [Figura (2.1)], las cuales se dibujan en un pedazo de papel cuadriculado en movimiento o bien una computadora almacena los valores de tiempo y voltaje en un archivo de datos. Se debe permanecer acostado, sin moverse y con los ojos cerrados, ya que el movimiento puede alterar los resultados [28].

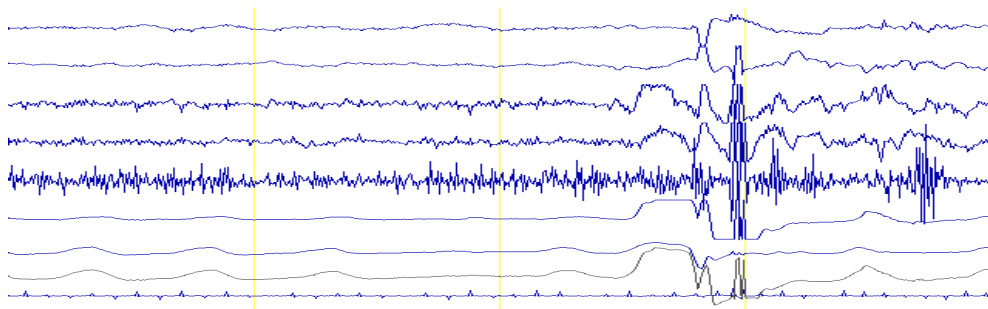


Figura 2.1: Trazo electroencefalográfico para un registro de 9 canales.

Es posible que al paciente se le pida hacer ciertas cosas durante el proceso de

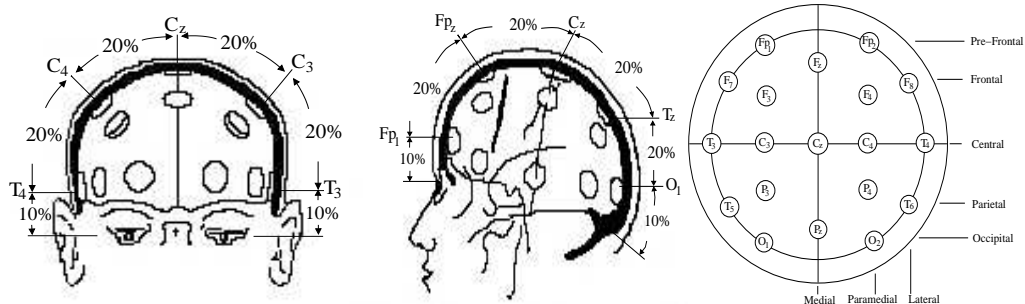


Figura 2.2: Distribución sistemática de la posición de electrodos en el sistema 10-20.

registro, como respirar profunda y rápidamente por algunos minutos o mirar hacia una luz muy brillante y centellante.

2.1.1. Electrodos

El Electroencefalograma es más difícil de registrar que otros biopotenciales ya que las señales electroencefalográficas tienen voltajes menores. Los electrodos tienen diversas formas y pueden ser de cualquier metal que, con la ayuda de una solución salina fisiológica o de una pasta conductora, pueda establecer contacto con la superficie de la cabeza. Las propiedades eléctricas de los electrodos dependen, antes que nada, del tipo de metal utilizado y pueden ser modificadas por cambios de estado de las superficies metálicas.

2.1.2. Disposición de electrodos

El montaje de los electrodos sobre los puntos de registro en la superficie del cráneo se lleva a cabo según una distribución sistemática. Con fines comparativos es preferible trabajar con un sistema de disposición de electrodos internacional y unitario; este sistema de registro se conoce como *sistema 10-20* [Figura (2.2)]. Se parte de cuatro puntos determinados de la cabeza, del nasión (el punto ubicado en la base de la nariz sobre la sutura frontonasal), del inión (punto situado en la parte posterior de la cabeza que se corresponde con la protuberancia occipital) así como de los dos puntos preauriculares correspondiéndose cada uno de ellos con el comienzo del hueso cigomático delante del trago.

Para determinar la posición de los electrodos se considera como 100 % al valor

de la distancia que separa al nasión del inión medida sobre el vértex en la línea media. Se marcan cinco puntos a lo largo de esa línea. Los electrodos se colocan de tal manera que el primer electrodo quede separado del nasión por una distancia correspondiente al 10 % del total y de igual manera, el último electrodo está separado del inión un 10 % sobre la misma línea. El resto de la línea lo ocupan tres electrodos que están separados entre sí así como del primer y último electrodo por distancias cada una equivalentes al 20 % de la distancia total. A causa de este principio de distribución se denomina 10–20. Para la determinación de los puntos sobre la línea de unión entre nasión, puntos preauriculares e inión, las horizontales, se procede de manera idéntica partiendo del nasión y del inión, ya sea a derecha o izquierda.

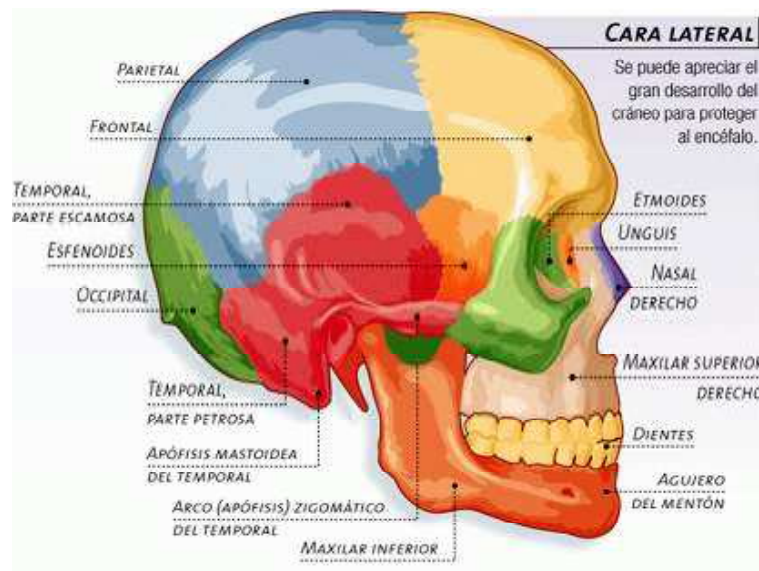


Figura 2.3: Anatomía del cráneo humano.

La posición de los electrodos se identifica con letras y números, sobre el hemisferio derecho con números pares y sobre el izquierdo con impares. Las letras identifican cada región de la cabeza [Figura (2.3)]: frontopolar o prefrontal (Fp), frontal (F), temporal (T), central (C), parietal (P), occipital (O), con lo cual se dice únicamente que se registra sobre esas regiones de la cabeza. Esto no significa, sin embargo, que la información deba proceder de las regiones cerebrales ubicadas bajo ese punto. A cada uno de los electrodos ubicados sobre la línea media se le asigna la letra zeta minúscula (*z*, de *zero*) (Fz, Cz, Pz).

2.2. Patología epiléptica

Las *epilepsias* son enfermedades crónicas, de etiología diversa, caracterizadas por presentar *crisis* recurrentes [29]. Las crisis epilépticas son aquellas que resultan de una descarga excesiva de las neuronas cerebrales, asociadas a diversas manifestaciones clínicas, éstas pueden aparecer como convulsiones caracterizadas por la actividad desordenada de los brazos y piernas acompañada por lo general de mordedura de lengua y emisión de orina. En otras ocasiones aparecen de forma menos aparatosa como una falta de respuesta a estímulos, durante el cual la persona se queda con la mirada fija, ausente, asociándose en ocasiones movimientos automáticos (como tragar repetidamente o frotarse las manos). Estas crisis se denominan crisis parciales o focales o bien ausencias, dependiendo de las características particulares [30].

Las crisis epilépticas pueden ser la manifestación de problemas muy variados y pueden deberse a situaciones tan diversas como un tumor cerebral, una malformación, una meningitis, una conmoción cerebral causada por un golpe en la cabeza, un exceso en la toma de bebidas alcohólicas, etc. En algunos casos no se encuentra la causa de la epilepsia, o es de carácter hereditario.

Las crisis epilépticas se producen por una alteración de las células cerebrales (las neuronas) en un lugar del cerebro (crisis focales) o por una excitabilidad general del cerebro en su conjunto (crisis generalizadas). Las crisis focales suelen ser debidas a lesiones cerebrales (un tumor, una malformación o una cicatriz). Por otra parte, en las crisis generalizadas no se suele encontrar una anomalía evidente en el cerebro y posiblemente sean debidas a una anomalía en la regulación de la comunicación de las células cerebrales, tal vez de causa genética [31].

Por otro lado, cualquier persona puede presentar una crisis aislada en condiciones excepcionales. Por ejemplo, la falta de sueño, el abuso de drogas estimulantes (anfetaminas, cocaína), el alcohol o la fiebre pueden todos ellos aumentar el riesgo de tener crisis. Todo depende del llamado *umbral* para la epilepsia. Por ejemplo, algunas personas tienen una alta resistencia para tener crisis (un alto umbral) y por más factores provocadores a las que se las pueda someter no sufrirán una crisis. Por el contrario, hay personas con un umbral muy bajo que facilita el que tengan crisis. Generalmente la resistencia o facilidad para tener crisis está asociada a factores hereditarios poco conocidos.

La epilepsia puede aparecer a cualquier edad: desde la infancia hasta la ancianidad, aunque suele ser más frecuente en los dos extremos de la vida. La epilepsia no tiene prejuicios: afecta por igual a hombres y mujeres, ricos y pobres, y a personas de cualquier credo o raza.

No hay una prueba única para diagnosticar la epilepsia. De hecho lo más importante para su diagnóstico es obtener una descripción detallada de las crisis. Por ello, es fundamental ir al neurólogo acompañado de un familiar o testigo de la crisis. Una vez hecho el diagnóstico se complementa con pruebas que ayudan a detectar cual es el origen de las crisis. Las pruebas más importantes son la Tomografía Axial Computarizada (o TAC) cerebral, la Resonancia Magnética Cerebral y el electroencefalograma. Las dos primeras son útiles para ver la estructura del cerebro y pueden detectar la presencia de tumores, cicatrices, quistes, malformaciones cerebrales, etc. Por otra parte, con el electroencefalograma se obtiene el registro de la actividad eléctrica cerebral que indica la posible excitabilidad del cerebro y la localización de esta excesiva excitabilidad. En ocasiones, es necesario el registro de las crisis epilépticas mediante un sistema de circuito cerrado de vídeo-electroencefalograma para poder diagnosticar con seguridad la epilepsia o para poder determinar el lugar cerebral que da origen a las crisis [31].

2.3. Nomenclatura de las ondas del EEG

En el registro de un EEG aparecen ondas de diversas frecuencias, amplitudes y formas. Estos elementos aislados y sus combinaciones constituyen un variado contenido informativo. Seguidamente se describirán las ondas del EEG y sus características, en las distintas bandas de frecuencia.

Banda α : Ondas regulares o irregulares simétricas sobre ambos hemisferios de unos 8-13 Hz, en estado de vigilia relajado, con los ojos cerrados. Más notables en las regiones posteriores de la cabeza. Amplitud variable por debajo de 50 μV .

Banda β : Ondas en las de más de 13 Hz, en estado de vigilia con los ojos cerrados, en las regiones frontocentrales de la cabeza. Amplitud variable, generalmente inferior a 30 μV .

Zona de frecuencia de sueño: Ondas sobre las regiones centrales de la cabeza de unos 11-15 Hz, generalmente de 12-14 Hz, de distribución casi siempre difusa.

Amplitudes variables, inferior a $50 \mu\text{V}$.

Banda θ : Ondas simétricas sobre las regiones anteriores de la cabeza de baja amplitud distribuidas irregularmente entre 4-7 Hz.

Banda δ : Ondas que no tienen un origen exacto, de baja amplitud, de unos 0.5-2 Hz y de distribución irregular.

2.4. Características de la obtención de las señales EEG

El registro de las señales electroencefalográficas se realizó en 19 canales a partir de electrodos adheridos a la superficie de la cabeza con pasta conductora, en los sitios establecidos por el sistema internacional 10-20, midiéndose la diferencia de potencial respecto a una referencia constituida por ambas orejas cortocircuitadas. Se digitalizó la señal a una frecuencia de muestreo de 256 Hz y conversión A/D de 12 bits, filtrada digitalmente entre 0.5 y 30 Hz. Se seleccionaron para el análisis, registros de tiempo variable de actividad en reposo de 10 sujetos sanos y 30 pacientes epilépticos, de los cuales 10 se encuentran bajo tratamiento, 18 les fue diagnosticada epilepsia y se encuentran sin tratamiento y dos presentaron una crisis durante la consulta, una de ellas es espontánea y la otra es inducida.

*Si el cerebro fuera tan simple que pudiéramos comprenderlo,
seríamos tan simples que no lo entenderíamos.*

Lyall Watson.

Capítulo 3

Medidas de complejidad en señales EEG

Investigaciones recientes, incluyendo una realizada en nuestro grupo de investigación en Caos y Sistemas Complejos de la ULA [32], han mostrado que la patología epiléptica está asociada a la aparición de un estado dinámico sincronizado en el cerebro, evidenciado en la sincronización de las señales de los distintos canales del electroencefalograma de pacientes epilépticos. Estos descubrimientos han demostrado la utilidad de los métodos provenientes de la dinámica no lineal en la comprensión de diversas patologías cerebrales mediante el análisis de señales fisiológicas.

En este capítulo presentaremos la caracterización de las señales EEG desde el punto de vista de su grado de complejidad, basados en la suposición de considerar al cerebro humano como un sistema complejo.

3.1. Complejidad estructural

Ahora nos enfocaremos en la emergencia de estructuras o patrones macroscópicos en señales electroencefalográficas. Hemos utilizado la medida de complejidad LMC para caracterizar la complejidad estructural de las señales EEG tanto de sujetos sanos como de pacientes con epilepsia. Para calcular este tipo de complejidad hemos empleado el método llamado *Principal Component Analysis* o PCA por sus siglas en

inglés [33] (Ver Apendice A para una breve descripción). Este procedimiento permite reducir la dimensionalidad efectiva de un sistema dinámico. En nuestro análisis hemos empleado este método para reducir la dimensionalidad del EEG, el cual está constituido por vectores de 19 dimensiones. Antes de continuar, realizaremos una revisión a los aspectos mas importantes del procedimiento a seguir para obtener la complejidad. El procedimiento está resumido en cinco pasos, estos son:

1. Una vez que se ha seleccionado el EEG a estudiar, se realiza la transformación de los datos a un espacio de funciones infinito-dimensional por medio del kernel PCA no lineal.
2. Luego, se seleccionan los autovectores en cuyas direcciones se encuentran los datos mas relevantes, estos son, los datos a ser conservados en la reducción de la dimensionalidad.
3. Ahora, se debe elegir la cantidad de estados sobre los cuales se hará la medida de complejidad.
4. Se encuentra la distribución de probabilidad resultante.
5. Finalmente, se obtiene un valor de la complejidad para el sujeto bajo estudio.

Hemos realizado estudios sobre el tamaño del parámetro σ proveniente del método PCA, sobre la cantidad de dimensiones necesarias para poder representar el EEG y sobre el número de estados que fijan nuestra escala de medición. Estos estudios se presentan a continuación.

3.1.1. Estudio sobre el tamaño de σ

Para el cálculo de la complejidad hemos utilizado el kernel PCA no lineal descrito por la siguiente función,

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$

donde \mathbf{x} y \mathbf{y} son vectores del EEG y σ es un parámetro. Para la elección de un valor adecuado de σ , sólo tenemos que buscar el menor valor para el cual la matriz de transformación no es singular. Experimentos realizados con los datos EEGs, los cuales son del orden de 10^1 , mostraron que se debe satisfacer que $\sigma \geq 240$ para

todos los casos bajo estudio. Un σ mayor a este valor nos asegura la invertibilidad de la matriz. En los cálculos subsiguientes hemos elegido $\sigma \geq 248$.

3.1.2. Estudio sobre la cantidad de dimensiones

Un electroencefalograma generalmente está compuesto por una cantidad mayor o igual a 16 canales que corresponden a diversas zonas del cerebro. Cada canal constituye una serie de tiempo que refleja la actividad eléctrica de la zona del cráneo donde se encuentra¹ el electrodo de registro. Si quisieramos realizar un gráfico del EEG de un sujeto, cada una de estas series temporales constituiría una dimensión. Los EEGs de nuestra base de datos están constituídos por 19 canales, además de una referencia (ambas orejas cortocircuitadas), y un canal indicando el tiempo. Siendo la dimensionalidad tan alta, hemos utilizado el método del Kernel PCA no lineal para reducir este número. Las direcciones más importantes (con mayor varianza) en el espacio dual, están dadas por aquellos autovectores de la matriz de transformación que corresponden a los autovalores más grandes. En la Fig. (3.1) se muestran los cinco autovalores más grandes para cuatro de los sujetos bajo estudio, dos de ellos normales y dos con epilepsia, los cuatro fueron escogidos al azar en cada grupo.

En esta figura observamos que los dos primeros autovalores de cada EEG contienen la mayor cantidad de información sobre la señal original, mientras que los últimos tres autovalores, de los cinco mostrados, contienen una cantidad de información no muy significativa. Los 14 autovalores restantes de cada EEG mostrado, tienen en común que todos son menores a 10^{-5} . Así, encontramos que un vector 3-dimensional puede representar cualquier EEG de nuestra base de datos sin una pérdida significativa de información.

3.1.3. Estudio sobre el número de estados: *escala*

La definición de complejidad depende de la escala. A cada escala de observación, un nuevo conjunto de estados accesibles aparecen con su correspondiente distribución de probabilidad y por tanto la complejidad cambia. En la Fig. (3.2) vemos la variación del valor de la complejidad para diversas escalas.

¹Cada canal también puede reflejar el comportamiento de la actividad cerebral proveniente de otras partes del cerebro.

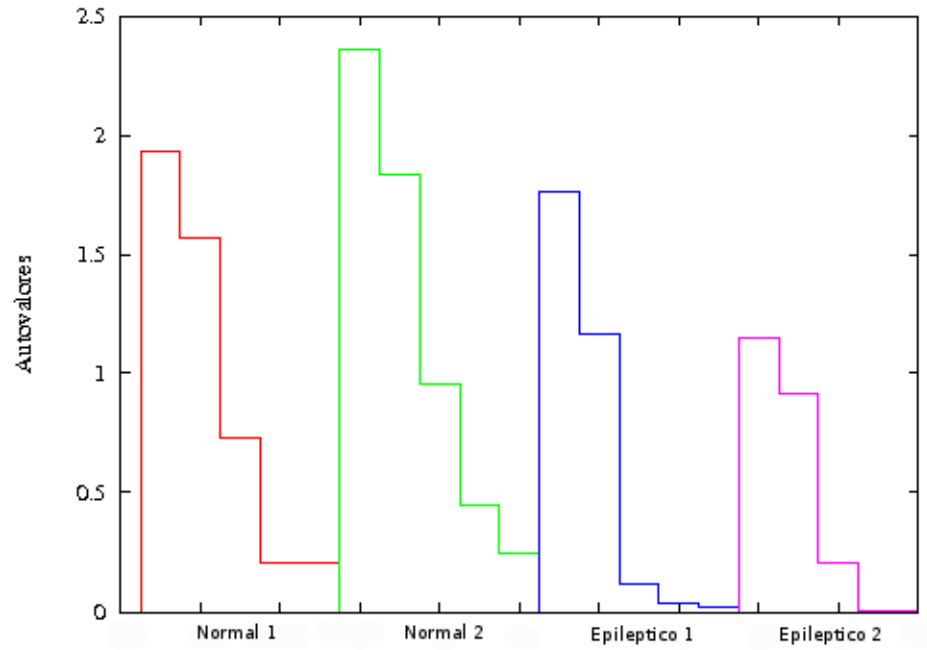


Figura 3.1: Los cinco autovalores más grandes para dos sujetos sanos y dos pacientes con epilepsia escogidos al azar. El resto de los EEGs de la base de datos presentan un comportamiento similar.

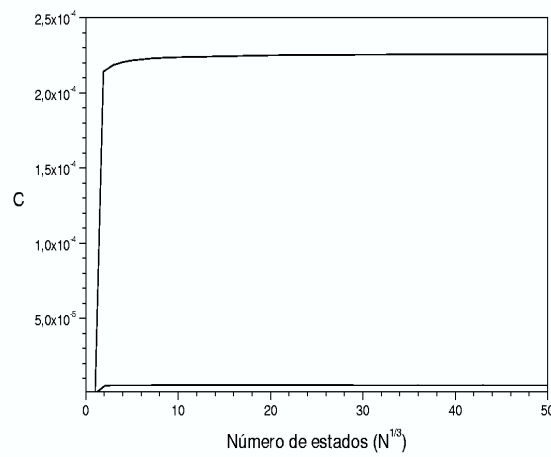


Figura 3.2: Valor de la complejidad para diversas cantidades de estados para un sujeto sano (arriba) y un paciente epileptico (abajo).

En la Fig. (3.2) se observa que el valor de la complejidad aumenta a medida que la cantidad de estados se hace más grande. Los valores de la complejidad para un número de estados menor a 11^3 son los valores donde la distribución de probabilidad varía de manera considerable con respecto a la cantidad de estados, mientras que a partir de este valor, la distribución de probabilidad no presenta grandes cambios y por tanto la medida de complejidad se mantiene estable. El comportamiento de la complejidad con respecto al número de estados es similar en todos los EEGs, tanto de sujetos sanos como de aquellos patológicos. Para el resto de los cálculos en este trabajo, hemos elegido una cantidad de estados igual a 22 particiones por cada eje, lo que nos da un total de 10648 estados, donde todos los EEG se encuentran en la zona más estable de la complejidad.

3.1.4. Complejidad de los datos EEG

Los resultados de la aplicación del método anteriormente descrito se muestran en la Fig. (3.3), donde se observan los valores de la complejidad para el grupo de sujetos sanos y el de pacientes con patología epiléptica diagnosticada.

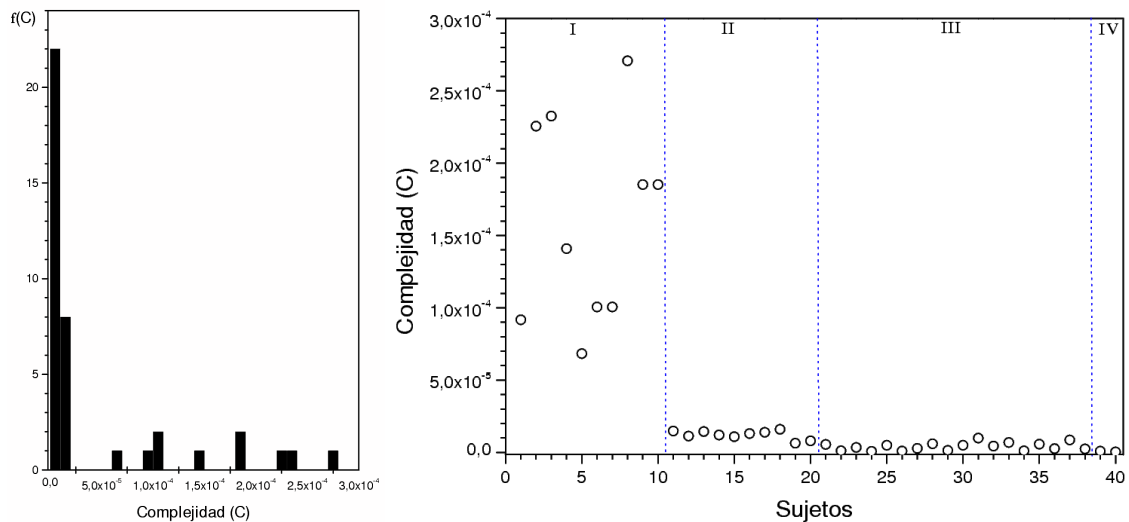


Figura 3.3: Histograma de frecuencias de los valores de complejidad para los 40 EEGs en estudio obtenidos con el método PCA. A la derecha se observa el valor de la complejidad para cada uno de los grupos. El eje horizontal en la gráfica de la derecha sólo tiene sentido orientativo.

En el panel de la derecha de la Fig. (3.3) se muestra el valor de la complejidad

para cada uno de los 40 EEGs en estudio. La sección I muestra el grupo de sujetos sanos, la sección II corresponde a los pacientes con epilepsia que se encuentran bajo tratamiento, en la sección III se encuentran los pacientes con epilepsia diagnosticada pero sin tratamiento y en la sección IV se observan los pacientes con epilepsia durante la etapa clónica. El histograma mostrado representa la cantidad de sujetos que se encuentran en un cierto rango de complejidad. La columna mas alta representa todos aquellos pacientes con epilepsia que se encuentran en las secciones III y IV. La segunda columna muestra aquellos pacientes con epilepsia que se han sometido a un tratamiento médico. El resto de las columnas corresponden al grupo de sujetos sanos.

Ahora realizaremos un estudio similar al mostrado, pero en lugar de utilizar el método del Kernel PCA no lineal para reducir la dimensión del EEG, utilizaremos la media aritmética en cada instante de tiempo. Para esto calcularemos el campo medio en cada instante de tiempo y luego obtendremos el valor de la complejidad de este campo medio. Los resultados se muestran en la Fig. (3.4), donde se encuentran los valores de la complejidad para los 40 sujetos en estudio.

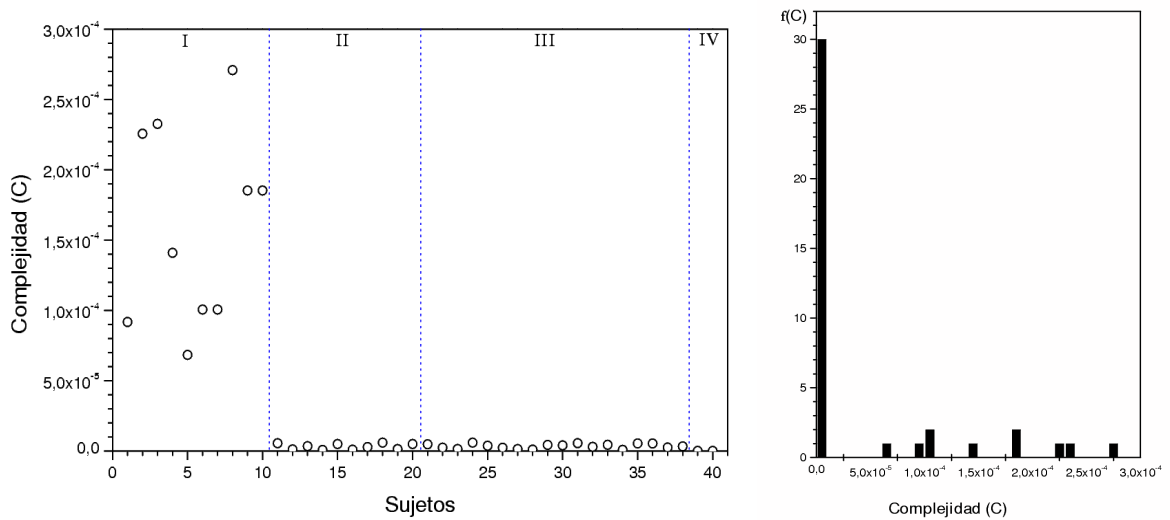


Figura 3.4: Valores de la complejidad LMC calculados a partir del campo medio de cada EEG. El eje horizontal en la gráfica de la derecha sólo tiene sentido orientativo; a la derecha se observa el histograma de frecuencias de los valores de complejidad para los 40 EEGs en estudio.

La gráfica de la izquierda muestra la complejidad de cada sujeto como sigue: sección I, sujetos sanos; II, epilépticos bajo tratamiento; III, epilépticos sin tratamiento y IV, epilépticos durante una crisis convulsiva. A la derecha se observa el histograma de frecuencias de estas medidas. Podemos ver que en este caso, el campo medio a pesar de ser una representación que obvia una gran cantidad de información, para los casos bajo estudio parece ser una medida en la que se encuentra información relevante acerca de la dinámica local de cada canal del EEG.

De estos resultados podemos concluir que la actividad cerebral en la patología epileptica presenta una enorme coherencia, de forma que abandona las irregularidades de un cerebro sano, para obedecer a regímenes ordenados, así, podemos asociar la patología epiléptica a un estado de menor complejidad de aquellos sujetos sanos, y que en los episodios de crisis convulsivas hacen decrecer aún más estos niveles de complejidad del cerebro, haciendolo más ordenado y fácil de predecir. También podemos ver que para el grupo de pacientes con epilepsia que se encuentran bajo un tratamiento médico y fueron analizados por medio del método del PCA, los niveles de complejidad son un poco mayor con respecto al de los que no poseen tratamiento médico, lo que sugiere que los fármacos inducen un mayor nivel de complejidad en el cerebro. Esta última observación es válida para los primeros ocho pacientes en la sección II, ya que los dos últimos no presentan diferencias significativas con aquellos pacientes que no siguen un tratamiento; esto puede deberse a que a estos pacientes se les ha indicado un tratamiento pero no lo llevan a cabo de manera constante o el tipo de tratamiento es diferente al del resto del grupo II.

We now understand that chaos exists in many natural phenomena, including our brains, and thus we have to ask paradoxically why we perceive our own existence and why we recognize the separation between subject and object.

Kunihiko Kaneko.

Capítulo 4

Comportamiento colectivo emergente

En los últimos años ha habido mucho interés en describir y comprender el fenómeno de emergencia de comportamiento no trivial en sistemas formados por elementos caóticos que interactúan entre sí [34]. El comportamiento colectivo no trivial está caracterizado por una evolución ordenada o bien definida de cantidades macroscópicas que coexisten con comportamientos locales desordenados. Modelos basados en redes de mapas acoplados han sido ampliamente usados en la investigación de fenómenos cooperativos que aparecen en muchos sistemas extendidos con dinámica caótica [35]. En este capítulo, estudiaremos la complejidad LMC en redes de mapas acoplados que exhiben comportamiento colectivo no trivial.

4.1. Complejidad en sistemas con comportamiento colectivo emergente

Para estudiar la complejidad en sistemas espaciotemporales donde el orden global emerge a partir del caos local, consideraremos un sistema de \mathcal{N} elementos interactuantes, donde el estado del elemento i ($i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$) en un tiempo discreto t , se denota por x_t^i . Asumimos que la evolución de cada elemento depende de su

propia dinámica local y de su interacción con otros los elementos de la red, donde la intensidad de las interacciones está dada por un parámetro de acoplamiento ϵ . La dinámica colectiva del sistema en el tiempo t puede ser descrita por alguna variable estadística h_t .

Hemos calculado el valor de la complejidad C como una función de la intensidad de acoplamiento en sistemas de mapas acoplados que exhiben comportamiento caótico no trivial. El primer ejemplo a estudiar es un sistema de mapas sujeto a acoplamiento global descrito por

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f_i(x_t^i) + \frac{\epsilon}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j(x_t^j), \quad (4.1)$$

donde la función $f_i(x_t^i)$ describe la dinámica local del elemento i . El sistema usual de mapas homogéneos acoplados globalmente [36] corresponde a tener la misma función local para todos los elementos, i.e., $f_i(x_t^i) = f(x_t^i)$. Como dinámica local, empleamos el mapa logarítmico $f(x) = b + \ln|x|$ [37], donde b es un parámetro real. Caos robusto ocurre en el intervalo de parámetros $b \in [-1, 1]$, sin ventanas periódicas ni bandas caóticas separadas [37].

En nuestro segundo ejemplo, hemos introducido heterogeneidad en la dinámica local, tomando ahora $f_i(x_t^i) = b_i + \ln|x_t^i|$, con valores de b_i distribuidos en $[-1, 1]$. Como variable macroscópica para estos sistemas hemos considerado el campo medio instantáneo, definido como

$$h_t = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j(x_t^j) \quad (4.2)$$

La Fig. (4.1)(a) muestra el diagrama de bifurcación del campo medio h_t del sistema de mapas homogéneos globalmente acoplados [Ec. (4.1)] como función de la intensidad de acoplamiento ϵ [38]). El parámetro local está fijo en $b = 0$ para todos los mapas y el tamaño del sistema es $\mathcal{N} = 10^4$. Para cada valor de ϵ , el campo medio fue calculado en cada iteración t , partiendo de condiciones iniciales aleatorias en la dinámica local de los mapas, distribuidas uniformemente en el rango $x_0^i \in [-8, 8]$.

Cuando el parámetro local b está distribuido en el rango $b \in [-1, 1]$, los elementos x_t^i son caóticos y están desincronizados [ver Fig. 4.2(c)], por lo tanto, el campo medio en la Fig. 4.2(a) revela la existencia de atractores periódicos globales para algunos intervalos de la intensidad de acoplamiento ϵ [18]. Diferentes estados colectivos emergen como una función del acoplamiento ϵ : una fase turbulenta, donde h_t se

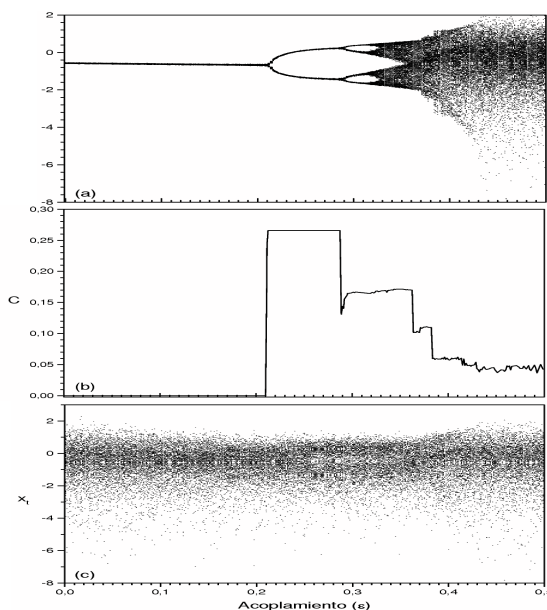


Figura 4.1: (a) Diagrama de bifurcación h_t vs ϵ para el sistema de mapas homogéneos globalmente acoplados, $b = 0$. (b) Valor de complejidad y, (c) diagrama de bifurcación de un mapa x_t^i .

manifiesta como un punto fijo, siguiendo un comportamiento de variables no correlacionadas; estado periódico colectivo; bandas caóticas colectivas y sincronización caótica [38].

La Fig. (4.1)(b) muestra C vs ϵ . Un cambio abrupto en el valor de la complejidad puede ser claramente visto como un valor crítico del acoplamiento $\epsilon_c = 0,211$, un comportamiento característico de una transición de fase de primer orden [18]. A este valor crítico de la intensidad de acoplamiento el comportamiento colectivo cambia de una fase turbulenta a un estado de periodicidad colectiva, como se observa en la Fig. (4.1)(a). Para $\epsilon < \epsilon_c$ el valor de la complejidad tiende a cero, indicando que los elementos están tan desordenados que se asemejan al comportamiento de un gas ideal, donde existe equiprobabilidad en los estados accesibles. Para $\epsilon > \epsilon_c$, la complejidad aumenta de manera casi discontinua. Las unidades locales repentinamente empiezan a sentir el efecto del campo global; cada mapa se encuentra en un régimen caótico que obedece a un comportamiento colectivo autorganizado, donde la complejidad es máxima. Si continuamos aumentando el valor de ϵ , encontraremos que la complejidad disminuye momentos antes de cada cambio de periodicidad, y luego

aumenta de manera drástica durante el cambio.

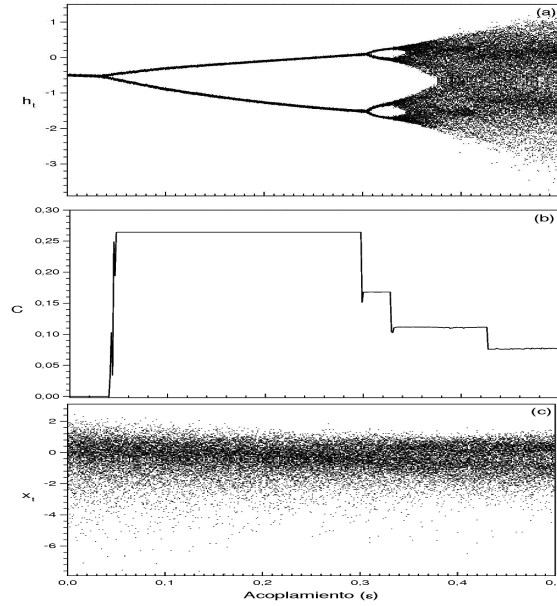


Figura 4.2: (a) diagrama de bifurcación h_t vs ϵ para el sistema de mapas acoplados heterogeneo. (b) Valor de complejidad y (c) diagrama de bifurcación de un mapa x_t^i .

En la Fig. (4.2)(a) se observa el diagrama de bifurcación de h_t vs ϵ para el sistema de mapas heterogeneos globalmente acoplados. En este caso los parámetros locales b_i son un conjunto de valores aleatorios con una distribución uniforme en el rango $b_i \in [-1, 1]$. De nuevo, las dinámicas locales son caóticas, y continúa surgiendo comportamiento colectivo para algunos valores de la intensidad de acoplamiento. La Fig. (4.2)(b) muestra el valor de la complejidad LMC en función del parámetro de acoplamiento para este sistema. En este caso el valor de la complejidad permanece muy cercano a cero cuando ϵ aún no alcanza el valor crítico $\epsilon_c \simeq 0,040$ y aumenta abruptamente cuando $\epsilon > \epsilon_c$, comportandose de manera similar al caso anterior cuando existe un cambio en la periodicidad colectiva.

Obsérvese que en los diagramas de bifurcación mostrados en las Fig. (4.1)(a) y (4.2)(a), los elementos del diagrama no son puntos únicos donde todas las dinámicas locales convergen, por el contrario son bandas que poseen un ancho, el cual disminuye cuando aumenta el tamaño del sistema.

En la Fig. (4.3) observamos el comportamiento del valor de la complejidad con respecto del número de estados accesibles, para dos valores de la intensidad de aco-

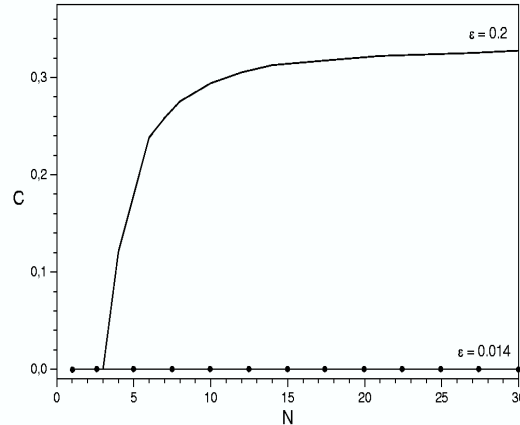


Figura 4.3: Variación de la complejidad vs cantidad de estados accesibles en el sistema para dos intensidades de acoplamiento dadas

plamiento. El valor $\epsilon = 0,014$ corresponde al régimen colectivo de período uno y en $\epsilon = 0,2$ el sistema está en un régimen colectivo de período dos. Podemos ver que para una cantidad pequeña de estados, la complejidad del sistema es pequeña. Sin embargo, el valor de la complejidad varía considerablemente para $N \leq 9$. Para $10 \leq N \leq 19$ encontramos una región donde la variación no es tan amplia como en el caso anterior; para los casos $N \geq 20$ la complejidad continúa aumentando. La sensibilidad de la medida de complejidad con respecto a la cantidad de estados accesibles está directamente relacionada con la distribución de probabilidades con la que realizamos nuestras medidas. Cuando la cantidad de estados es muy pequeña, la resolución de nuestra medida es lo suficientemente buena para captar el comportamiento de la banda de elementos que se encuentran en un régimen colectivo en los dos regímenes mostrados, sin embargo, a medida que aumenta la cantidad de estados, las particiones de medición de probabilidad se hacen mas pequeñas, por lo que comenzamos a medir la complejidad interna de las bandas de elementos, lo que según vemos en nuestros graficos, es mayor. Para las medidas de complejidad mostradas anteriormente, se consideró $N = 15$; con esta cantidad de estados se logra captar la complejidad del comportamiento colectivo sin incluir el detalle del comportamiento interno de las bandas. A este valor de la cantidad de estados le llamaremos N_c .

Cuando el tamaño del sistema aumenta, se observa que el grosor de estas bandas,

que es proporcional a la dispersión estadística de los puntos en la banda, decrece como $\mathcal{N}^{-\frac{1}{2}}$ [35] siguiendo la ley de los grandes números. Como hemos visto, N_c depende directamente de la cantidad de estados en el sistema, lo que a su vez determina el tamaño de estos estados: $\mathcal{N} \sim N^{-1}$. Entonces, encontramos que

$$\frac{1}{N_c} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} \sim N_c^2 \quad (4.3)$$

Así que, si variamos el tamaño del sistema \mathcal{N} , entonces el número de estados mínimos N_c para medir la complejidad del comportamiento colectivo variará como lo indica la Ec. (4.3) (salvo algunas constantes), de este modo dado el tamaño \mathcal{N} del sistema de mapas acoplados, es posible estimar el tamaño crítico N_c del número de estados para medir la complejidad relacionada con la emergencia del comportamiento colectivo no trivial.

4.1.1. Discusión

En el capítulo anterior observamos que la medida de complejidad planteada por López-Ruiz, Mancini y Calbet funciona como discriminador entre sujetos sanos y aquellos a los que se les ha diagnosticado algún tipo de epilepsia. Ésto lo hemos observado al reducir la representación global de la actividad eléctrica cerebral, detectada por el EEG, por medio del método PCA. En el capítulo anterior también observamos que la media aritmética en cada instante de tiempo conserva información relevante del cerebro en su conjunto, ya que la medida de complejidad LMC realizada usando el campo medio de los EEGs, sugiere una diferencia entre los dos principales grupos de individuos bajo estudio. Un punto relevante es el hecho de que sistemas simulados, como lo es el caso de las redes de mapas acoplados, presentan un comportamiento colectivo emergente que puede ser detectado mediante el estudio de la evolución de su campo medio. De este manera, parece natural la posibilidad de encontrar información relevante en esta cantidad macroscópica, a pesar de que ésta excluye una gran cantidad de información que se anula o exalta en el proceso de su cálculo. Sin embargo, como hemos visto acá, este tipo de variables nos pueden dar información acerca del comportamiento global del sistema, el cual no puede ser deducido a partir del comportamiento de sus elementos básicos. Para ir un paso más allá, en los gráficos donde aparece el mapa de bifurcación de las redes de mapas acoplados que se estudiaron, vemos la caída de la complejidad en

pequeños "escalones", cuando se producen cambios en la cantidad de órbitas periódicas (a partir de 2 órbitas). Del análisis de los EEGs, distinguimos que el estado sano y el estado de patología corresponden a distintos niveles de complejidad, los cuales podemos asociar con el cambio de complejidad producido en las redes de mapas acoplados. Más aún, en el caso de los mapas homogéneos acoplados es posible detectar un estado de sincronización de los elementos básicos a partir de $\epsilon \sim 0,430$, lo cual podemos relacionar con los resultados obtenidos en medida de sincronización de sujetos sanos y pacientes epilépticos [32], donde se encontró que el régimen de epilepsía corresponde a un estado de mayor sincronización. Sin embargo, en ningún momento este tipo de sistema simulado pretende establecer una semejanza directa con el cerebro, pero siendo las redes de mapas un sistema tan simple, logran exhibir un comportamiento complejo que puede explicar en cierto modo y sin gran detalle, el origen de las diferencias de complejidad detectadas en un cerebro humano sano y uno patológico.

Ahora ni siquiera sabemos si nos rodea un laberinto, un secreto cosmos, o un caos azaroso. Nuestro deber es imaginarnos el hilo y el laberinto. Nunca daremos con el hilo; acaso lo encontramos y lo perdemos en un acto de fe, en una cadencia, en un sueño, en las palabras que se llaman filosofía, o en la mera y sencilla felicidad.

Jorge Luis Borges, Los conjurados.

Conclusiones

La medida de complejidad planteada por LCM ha mostrado no sólo ser útil en modelos teóricos, sino también ha sido de utilidad en el análisis de datos provenientes de sistemas reales. Los datos analizados en este trabajo, nos han mostrado que existe una diferencia de tipo morfológico entre las señales electroencefalográficas de sujetos sanos y pacientes con epilepsia, incluso cuando algunos de estos pacientes han sido tratados con fármacos. La medida de la complejidad realizada sobre las bases de datos nos sugieren que la patología epiléptica está asociada a un estado de complejidad baja. Aquellos EEG de pacientes que sufrieron una crisis convulsiva durante el exámen electroencefalográfico, sugieren que este estado posee un nivel de complejidad menor en comparación de aquellos sujetos sanos.

Los cálculos de complejidad realizados reduciendo la dimensionalidad del EEG por medio del método de kernel PCA no lineal arrojaron resultados que discriminan los sujetos sanos de aquellos con epilepsia. Este método de cálculo de la complejidad también es capaz de diferenciar tres grupos de pacientes, aquellos que consumen fármacos para evitar las crisis, con un nivel de complejidad ligeramente mayor al resto; los que aún no tienen un tratamiento; y los que se encuentran en una etapa clónica, con el menor nivel de complejidad.

El campo medio de las señales electroencefalográficas fue utilizado en este trabajo como una cantidad global para representar al cerebro en su totalidad. Cálculos

de la complejidad LMC fueron realizadas sobre esta cantidad, indicando que el campo medio de los EEGs contiene información importante acerca de la totalidad del sistema, lo cual no es trivial ni directamente deducible, ya que en el proceso de cálculo de la media aritmética o campo medio, se atenúan o exaltan una gran cantidad de datos. Los resultados obtenidos del cálculo de la complejidad LMC a partir del campo medio del EEG indican que esta cantidad es capaz de diferenciar los dos grupos de sujetos, sanos y epilépticos, pero se pierden detalles como la diferencia entre los pacientes con tratamiento médico y los que no les han indicado un tratamiento.

El estudio de las redes de mapas acoplados, tanto para el caso homogéneo ($b = 0$) como el heterogéneo ($b \in [-1, 1]$), mostraron que el campo medio, calculado como la media aritmética en cada instante de tiempo, contiene información relevante del sistema que no puede ser derivada trivialmente del comportamiento de sus elementos constituyentes. En el caso homogéneo es posible identificar ciertos regímenes que surgen en el sistema cuando se varía la intensidad de acoplamiento; uno de estos regímenes es el caso de sincronización, el cual se encuentra para $\epsilon > 0,430$.

Nos permitiremos realizar una comparación complementaria de la presente investigación con trabajos anteriores sobre análisis de señales EEG en pacientes epilépticos. Por ejemplo, en [32] se demostró que la patología epiléptica está asociada a un estado de mayor sincronización del cerebro en su conjunto. También se encontró en dicho trabajo un hecho importante con respecto a la predicción de crisis epilépticas, ya que se evidenció un valor máximo de los parámetros caracterizadores de la sincronización, segundos antes del inicio de la crisis. Sin embargo, este método de clasificación de pacientes por medio de la sincronización de los canales del EEG, no arrojó una medida contundente que separara los sujetos sanos de los patológicos. Esto pudo deberse en gran parte a que los pacientes bajo estudio se encontraban bajo tratamiento médico, pero en el caso del sujeto durante la crisis epiléptica, se observó que durante la crisis el cerebro se encuentra en un estado de mayor sincronización. Hemos encontrado que las medidas de complejidad no son muy afectadas por el consumo de fármacos por parte de los pacientes patológicos, ya que es posible establecer una diferencia entre los sujetos sanos y los pacientes con epilepsia.

A partir de los resultados obtenidos en esta tesis, podemos decir que un cerebro sano y un cerebro patológico exhiben distintos niveles de complejidad. Hemos

mostrado que un sistema de mapas conectados de manera global, siendo un sistema muy simple en comparación con el cerebro humano, presenta diferentes niveles de complejidad en diferentes rangos de parámetros. En ningún momento se pretende identificar la red de mapas con el cerebro, sólo sugerimos que las propiedades colectivas relacionadas con la complejidad son cualitativamente similares, y que el aumento de complejidad está asociado a la emergencia de comportamientos colectivos no triviales en diversos sistemas.

No cabe duda alguna que el análisis no lineal beneficia este tipo de estudios. Paso a paso, los investigadores de sistemas complejos, donde la dinámica no lineal representa un factor importante, van construyendo un conocimiento de los fenómenos complejos que ocurren en sistemas reales, ésto aún sin una teoría unificada de la complejidad. Nada detiene el afán de conocimiento, por lo que aún con herramientas básicas, la física de los sistemas complejos sigue la tradición histórica de la búsqueda de las propiedades universales en los fenómenos naturales.

Bibliografía

- [1] S. Weinberg, *Dreams of a Final Theory*, Pantheon (1992).
- [2] K. Kaneko, I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer (2000).
- [3] N. Boccara; *Modeling Complex Systems*, Springer (2004).
- [4] R. Badii, A. Politi, *Complexity*, Cambridge University Press (1997).
- [5] A. Mikhailov, V. Calenbuhr, *From Cells to Societies: Models of Complex Behavior*, Springer (2002).
- [6] H. G. Schuster, *Complex Adaptive Systems*, Scator-Verlag (2002).
- [7] H. Kantz, T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, 2nd edition (2004).
- [8] P. E. Rapp, T. Bashore, J. Martinerie, A. Albano, I. Zimmerman y A. Mess. *Dynamics of brain electrical activity*. Brain Topography, 2:99-118. (1989).
- [9] M. C. Casdagli, L. D. Iasemidis, R. S. Savit, R. L. Glimore, S. N. Roper y J. C. Sacklelares. *Non-linearity in invasive EEG recordings from patients with temporal Lobe Epilepsy*. Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol. 1, 102, 98. (1997).
- [10] A. Babloyantz. *Chaotic dynamics in brain activity*. *Dynamics of sensory and cognitive processing by the brain*. E. Basar (Eds.), Springer, Berlin (1988).
- [11] A.N. Kolmogorov, Probl. Inform. Theory **1** 3 (1965).
- [12] G.J. Chaitin, *Information, randomness and incompleteness*. World Scientific, Singapur (1990).

- [13] A. Lempel y J. Ziv, IEEE Trans. Inform. Theory **22** (1976).
- [14] C.H. Bennett, en *Emerging syntheses in science*, ed. D. Pines (Adisson-Wesley, Reading, MA, 1988).
- [15] P. Grassberger, Int. J. Theor. Phys. **25** 907 (1986).
- [16] B.A. Huberman y T. Hogg, Physica D **22** 376 (1986).
- [17] S. Lloyd y H. Pagels, Ann. Phys. (NY) 186, 188 (1988).
- [18] L. Cisneros, J. Jiménez, M. G. Cosenza, A. Parravano, Phys. Rev. E (Rapid Communications) **65**, 045204(R) (2002).
- [19] R. Lopez-Ruiz, H. L. Mancini, X. Calbet, Phys. Lett. A **209**, 321 (1995).
- [20] E.T. Jaynes, Phys. Rev. 106 (1957) 620.
- [21] C.E. Shannon y W. Weaver, *The mathematical theory of communication* (University of Illinois Press, IL, 1949).
- [22] M. Perakh, *Defining complexity, On Talk Reason*, <http://www.talkreason.org/articles/complexity.pdf>, Agosto (2004).
- [23] X. Calbet, R. Lopez-Ruiz, Phys. Rev. E **63** 66116 (2001).
- [24] J.J. Wlodarz, Int. J. Theor. Phys. **42** 1075 (2003).
- [25] J. Sánchez, R. López-Ruiz, Arxiv preprint nlin.PS/0410062 (2004).
- [26] K. Huang, *Statistical Mechanics*, (John Wiley, NY, 1987).
- [27] W. Duke y W. S. Pritchard. *Proceedings of the conference on Measuring Chaos in Human Brain*. World Scientific, Singapore (1991).
- [28] Enciclopedia Médica en Español. *Electroencefalograma*.
URL: <http://www.nlm.nih.gov/medlineplus/spanish/ency/article/003931.htm>
- [29] A. Gimeno-Alava. *Epilepsia: guía práctica*. Madrid: Acción Médica; (1994).

- [30] J. Roger, M. Bureau, Ch. Dravet, F.E. Dreifuss, A. Perret, P. Wolf. *Epileptic Syndromes. In infancy, childhood and adolescence*. London: John Libbey; (1992).
- [31] S. Arroyo. *Guía para la epilepsia*. Grupo de Estudio de la Epilepsia de la Sociedad Española de Neurología. URL: <http://www.epilepsiasen.org/apublica/guiaepile.htm>. (1999).
- [32] M. Escalona-Morán, M. G. Cosenza, P. Guillén y P. Coutin; *Synchronization and clustering in electroencephalographic signals*. Chaos, Solitons & Fractals, en prensa (2006). Los Alamos arXiv:nlin.CD/0506014.
- [33] J. Karhunen, J. Joutsensalo; *Generalizations of principal component analysis, optimization problems, and neural networks*. Neural Networks **8**, 549 (1995).
- [34] H. Chaté y P. Manneville, Prog. Theor. Phys. **87**,1 (1992).
- [35] *Coupled Map Lattices*, editado por K. Kaneko, volumen especial de Chaos **2**, 279 (1992).
- [36] K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **65**, 1391 (1990).
- [37] T. Kawabe y Y. Kondo, Prog. Theor. Phys. **85**, 759 (1991).
- [38] M. G. Cosenza y J. González, Prog. Theor. Phys. **100**, 21 (1998).
- [39] B. Schölkopf, C. Burges y V. Vapnik. *Extracting support data for a given task*. U. M. Fayyad y R. Uthurusamy, eds., AAAI Press (1995).
- [40] E. Boser, I.M. Guyon y V. Vapnik. *A training algorithm for optimal margin classifiers*. Fifth Annual Workshop on COLT, Pittsburgh, 1992. ACM.

Apéndice A

Análisis de componentes principales

El análisis de componentes principales (PCA) se emplea cuando deseamos obtener una representación más simple (y en menos dimensión) para un conjunto de variables correlacionadas. Para examinar las relaciones entre un conjunto de p variables correlacionadas, transformamos el conjunto original de variables a un nuevo conjunto no correlacionado usando una *rotación ortogonal* en el espacio p -dimensional. Estas nuevas variables serán llamadas *componentes principales*. Las componentes resultantes son ordenadas de modo que las componentes mayores resuman la mayor cantidad posible de la variabilidad de los datos originales. Si un número pequeño de dichas primeras componentes resume la mayor parte de la variación de los datos, podría pensarse que la dimensionalidad real de los datos es menor que p . En tal caso, esperaríamos que estas componentes resulten significativas, y sean de utilidad para comprender mejor los datos y que sean útiles para simplificar análisis posteriores (esto no siempre es posible en la práctica). Obsérvese que el PCA es una técnica matemática, y no requiere el uso de una estructura probabilística para los datos.

A.1. Fundamentos del método

El método de PCA es una transformación de bases ortogonales. Las nuevas bases son encontradas diagonalizando la matriz de covarianza

$$Cov = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T \quad (\text{A.1})$$

construída a partir del conjunto de datos $\{\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^N | k = 1, \dots, l\}$ donde los \mathbf{x}_k cumplen la condición $\sum_{k=1}^l \mathbf{x}_k = 0$. Las coordenadas en la base de los autovectores son llamadas *componentes principales*. El tamaño de un autovalor λ correspondiente a un autovector \mathbf{v} de la matriz Cov es igual a la varianza en la dirección de \mathbf{v} . Las direcciones de los primeros n autovectores correspondientes a los n autovalores más grandes representan la mayor parte de la varianza en las n direcciones ortonormales. En la mayoría de las aplicaciones, estas direcciones contienen la información más importante para representar la serie de datos, como por ejemplo, en compresión de datos, donde los datos son proyectados en las direcciones de los autovalores más grandes para retener la mayor cantidad de información útil posible; o para depurar señales del ruido, donde las direcciones de los autovalores más bajos son despreciadas.

A.1.1. Kernel PCA no lineal

No podemos afirmar que un PCA lineal siempre detectará estructuras en un conjunto dado de datos, pero con el uso de la no linealidad, uno puede extraer más información. El método del kernel PCA no lineal es un método conveniente para identificar estructuras no lineales en los datos. Kernel PCA pasa los datos de una representación espacial a otra en un espacio dual \mathbf{F} por medio de una función Φ . Podemos usar diferentes kernels como la función Φ [39]. Para ciertos kernels $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ puede ser mostrado por medio de análisis funcional que existe un función Φ en el espacio \mathbf{F} (posiblemente de infinitas dimensiones), tal que k represente el producto escalar en \mathbf{F} . Existen varios tipos de kernels los cuales han sido utilizados exitosamente en Support Vector Machines [40], incluidos los kernels polinomiales $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^d$, funciones de base radial $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 / (2\sigma^2))$ y kernels sigmoidales $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tanh(\kappa(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \Theta)$.

Apéndice B

Glosario para físicos

Coma: Pérdida prolongada y mantenida de la conciencia, de tal forma que es imposible despertar al paciente. Existen distintos niveles de profundidad en relación a la presencia o ausencia de distintos reflejos y de la reactividad ante el dolor. El origen puede tener causas neurológicas, metabólicas u otras.

Convulsión: Contracción violenta e involuntaria de uno o más miembros o músculos del cuerpo.

Clónica: o etapa clónica consiste en sacudidas de los brazos y piernas, mayormente conocida como convulsión.

Electroencefalograma: Gráfico obtenido por el electroencefalógrafo en el que se registran las diferencias de potencial producidas en las células cerebrales.

Epilepsia: Enfermedad neurológica producida por una disfunción en la actividad eléctrica de la corteza cerebral y que se caracteriza por crisis convulsivas con pérdida brusca del conocimiento.

Etiología: Parte de la medicina que tiene por objeto el estudio de las causas de las enfermedades. Causa de una enfermedad.

Fisiología: Ciencia que estudia las funciones de los seres orgánicos.

Neurona: Célula diferenciada perteneciente al sistema nervioso, capaz de propa-

gar el impulso nervioso a otra neurona. Está compuesta por una zona de recepción, las dendritas, y otra de emisión o salida, el axón o neurita: se dice que a partir de cierta edad se acelera el proceso de pérdida de neuronas.

Meningitis: Inflamación de las meninges debida generalmente a una infección.

Neurología: Rama de la medicina que estudia las enfermedades del sistema nervioso.

Patología: Parte de la medicina que estudia las enfermedades; enfermedad, dolencia.

Quiste: Tumor formado por una cavidad rellena de diversas sustancias que se desarrolla en organismos vivos por alteración de los tejidos.

Ruido: Perturbación o señal anómala que se produce en un sistema y que impide que la información llegue con claridad.

Tónica: o etapa tónica. En una etapa tónica, la tensión muscular aumenta, y el tronco, los brazos y piernas esporádicamente realizan movimientos bruscos.

Tomografía Axial Computarizada: Técnica de obtención de imágenes por planos o cortes que, dependiendo del equipo empleado, es analógica o digital.

Torunda: Bola de algodón envuelta en gasa esterilizada, con diversos usos en curas y operaciones quirúrgicas.

Tumor: Hinchazón y bulto que se forma anormalmente en alguna parte del cuerpo. Alteración patológica de un órgano o de una parte de él, producida por la proliferación creciente de las células que lo componen.