

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Sincronización de elementos caóticos en  
Redes Asimétricas**

**Br. Danny Juliana De Castro C.**

para optar al título de licenciado en física

**Tutor: Dr. Kay Tucci**

Mérida, Marzo 2008

## **Resumen**

Este trabajo tiene como objetivo el estudio de la Sincronización en Redes de mapas logarítmicos caóticos con acoplamiento aleatorio. En redes aleatorias por defecto, se forman dos tipos de acoplamientos simétricos y asimétricos. Al variar la proporción de acoplamientos asimétricos, se descubre la existencia de una proporción crítica entre acoplamientos simétricos y asimétricos, para la cual es posible la emergencia de sincronización, para un determinado rango de la intensidad de interacción  $\epsilon$ . Revelando de esta forma que la emergencia de sincronización depende tanto de la intensidad de la interacción como del tipo de acoplamiento entre los elementos que componen la red.

A Lucy.

# Quisiera agradecer

A mis padres, Oscar y Lucy por todo su amor, dedicación y apoyo incondicional, sin ellos esta tesis no sería posible. A los dos los admiro por igual por la bonita familia que me dieron siempre llevada con alegría, optimismo, confianza y comprensión. A ti mamá porque me educaste en todos los sentidos con mucho amor, comprensión y mucho sentido del humor. A papá por las largas conversaciones sobre cultura general de las cuales aprendí y sigo aprendiendo mucho.

A mis hermanos Alexandra, Brian y Cristhian por su ejemplo de éxito en cada una de sus carreras. En especial a Alex por los 2 libros enviados desde Alemania que me sirvieron para la realización de esta tesis. ¡Gracias, Alex!, por dedicar tu tesis de licenciatura a tus hermanos.

A Mario Caicedo prof. Física de la USB, por que sus enseñanzas, triviaquiz, problemas propuestos, preguntas, dejaron una huella en mi intelecto.

A Fernando Dugarte por su colaboración en todas las prácticas de laboratorio, siempre con una sonrisa aliviando las largas horas de las prácticas.

A Mario Cosenza por darme la oportunidad de trabajar en el grupo de

caos y sistemas complejos y facilitarme los trabajos de tesis anteriores.

A Kay Tucci el tutor de esta tesis, quien con su tiempo y talento me brindo su valiosa ayuda en la realización de esta tesis. ¡Un millón profesor!, por su infinita comprensión, dedicación y paciencia.

Finalmente, mi especial agradecimiento a la persona más valiente, amoroso, que conozco a Oliver Vielma por su continuo apoyo emocional antes, durante y después de la realización de esta tesis. Por nuestras conversaciones prolíficas, por nuestros sueños, por todos los días fabulosos que hemos estado juntos ... en fin por todo.

# Índice General

<b>Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>1 Mapa Logarítmico</b>	<b>3</b>
1.1 Sistemas Dinámicos . . . . .	3
1.2 Mapa Logarítmico . . . . .	5
1.3 Estabilidad del Mapa Logarítmico . . . . .	7
1.4 Comportamiento del Mapa Logarítmico. . . . .	9
1.4.1 Región estable $b \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . . . . .	10
1.4.2 Región Crítica (Transición al caos) . . . . .	12
1.4.3 Región Inestable $b \in (-1, 1)$ . . . . .	16
1.5 Diagrama de bifurcación . . . . .	18
1.6 Exponente de Lyapunov . . . . .	19
<b>2 Sistemas Espacio-temporales</b>	<b>21</b>
2.1 Redes de Mapas Acoplados . . . . .	22
2.2 Construcción de una RMA a partir de la Ecuación Reacción- Difusión . . . . .	24

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
2.3 Redes, Matrices y Acoplamiento . . . . .	28
2.4 Tipos de Conectividad . . . . .	29
2.5 Sincronización . . . . .	32
2.5.1 Mapas Logarítmicos Acoplados Aleatoriamente . . . . .	34
2.5.2 Fracción de Enlaces Asimétricos . . . . .	38
2.5.3 Parámetro de Orden: Desviación Estándar . . . . .	40
<b>3 Sincronización y Asimetría</b>	<b>42</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>51</b>

# Introducción

El solo hecho de contemplar como un conjunto de mapas con dinámica caótica y condiciones iniciales aleatorias se sincronizan nos genera una sensación de asombro. Sabemos que deben estar acoplados y cumplir ciertas condiciones. En las últimas décadas, un grupo de investigadores se han preguntado como deben ser estas condiciones para que emerja sincronización en redes de mapas acoplados RMA [1, 2, 3]. Este trabajo nos dedicamos a explorar éste comportamiento en redes de mapas logarítmicos caóticos acoplados aleatoriamente con cierto grado de asimetría.

En particular, en este trabajo investigamos el efecto que tiene la proporción de acoplamientos simétricos y asimétricos en el surgimiento del fenómeno de sincronización en la red.

En el primer capítulo se introduce al lector a los tópicos de sistemas dinámicos y mapas. En particular se estudia el mapa logarítmico, que se utiliza como dinámica local de la RMA. Para ello dividimos el estudio en zonas según el criterio de estabilidad del mapa. Para cada una de las zonas se realizan un estudio descriptivo, uno numérico y uno gráfico. Esto nos permite



identificar la zona en donde se presenta el efecto mariposa o sensibilidad a las condiciones iniciales. Es en esta zona de interés, donde se establece la dinámica local para trabajo.

El capítulo dos se centra en sistemas dinámicos extendidos, redes de mapas acoplados y se introduce el fenómeno de sincronización, punto substancial de nuestro trabajo. Seguidamente se vuelve a las redes de acoplamiento, pero ya específicamente las que consideramos en este trabajo, como son las aleatorias, explicando todos los detalles de nuestro modelo de estudio, como lo son: la regla de evolución, la dinámica local, las interacciones, el tipos de acoplamientos, el parámetro de orden y nuestra definición de fracción de acoplamientos asimétricos.

En el capítulo tres se describe como se realiza la simulación de la red de mapas logarítmicos caóticos aleatoriamente acoplados y progresivamente se muestran los resultados e interpretaciones.

Finalmente tenemos las conclusiones de nuestro estudio, donde se muestra el efecto que tiene el grado de asimetría de la red sobre la sincronización.

# Capítulo 1

## Mapa Logarítmico

En este capítulo presentamos algunas definiciones relacionadas con sistemas dinámicos y mapas haciendo énfasis en las propiedades dinámicas más relevantes del mapa logarítmico unidimensional, que es un elemento fundamental de este trabajo.

### 1.1 Sistemas Dinámicos

Con el fin de conocer la evolución temporal de algunos estado, a los sistemas físicos se les modela mediante un conjunto de reglas o ecuaciones a las que denominamos Sistemas Dinámicos. Si un sistema es dinámico y además cada estado inicial genera una evolución única del sistema se está en presencia de un sistema dinámico determinista. La evolución temporal de un sistema dinámico puede desarrollarse de manera continua o discreta. Los sistemas

continuos se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales y los sistemas discretos con ecuaciones en diferencias (aplicaciones) o comúnmente llamados mapas. En este trabajo emplearemos mapas discretos unidimensionales.

Existen muchos modelos en física que se basan en mapas discretos [4, 5, 6]. Un mapa está definido como un sistema dinámico discreto de la forma,

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (1.1)$$

donde  $x_{t+1}$  representa el estado futuro y continuo del sistema, el cual depende del estado presente  $x_t$  en cada iteración de tiempo  $t$  discreto y  $f(x)$  es la función que rige la evolución del sistema. En nuestro estudio utilizaremos un mapa del tipo:

$$x_{t+1} = f(x_t, b), \quad (1.2)$$

donde,  $f(x_t, b)$  es una función no lineal, y  $b$  es el parámetro que controla el comportamiento del sistema para cualquier condición inicial  $x_0$ .

Además de modelar sistemas intrínsecamente discretos, los mapas, como representaciones discretas de ecuaciones diferenciales, facilitan el estudio numérico de sistemas continuos, puesto que en general con las computadoras es más adecuado tratar variables discretas que continuas.

## 1.2 Mapa Logarítmico

Los mapas con dinámica caótica permiten disponer de modelos matemáticos capaces de mostrar gradualmente la aparición de comportamiento caótico. Dado que para ciertos valores del parámetro de control  $b$ , estos mapas presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, se pierde la capacidad de predicción con el transcurso del tiempo.

En particular para el estudio del efecto que tiene la asimetría de la red de conectividad sobre la sincronización utilizaremos el mapa logarítmico propuesto por Kawabe y Kondo [8] quienes lo caracterizan, motivados por la solución numérica, obtenida por Kawabe, de integrales de tipo

$$\int_0^1 \ln^n(x) dx, \quad n \geq 1. \quad (1.3)$$

El mapa logarítmico tiene la forma,

$$x_{t+1} = b + \ln|x_t|. \quad (1.4)$$

La figura 1.1 muestra el diagrama de retorno del mapa logarítmico para diferentes valores del parámetro de control  $b$ .

Entre las propiedades más resaltantes del mapa logarítmico tenemos que no es unimodal, esto es, no tiene máximos ni mínimos; y su derivada Schwarziana es positiva lo que hace que no exhiba ruta al caos por secuencia de duplicación de periodos [4]. Además, el parámetro de control  $b$  como el es-

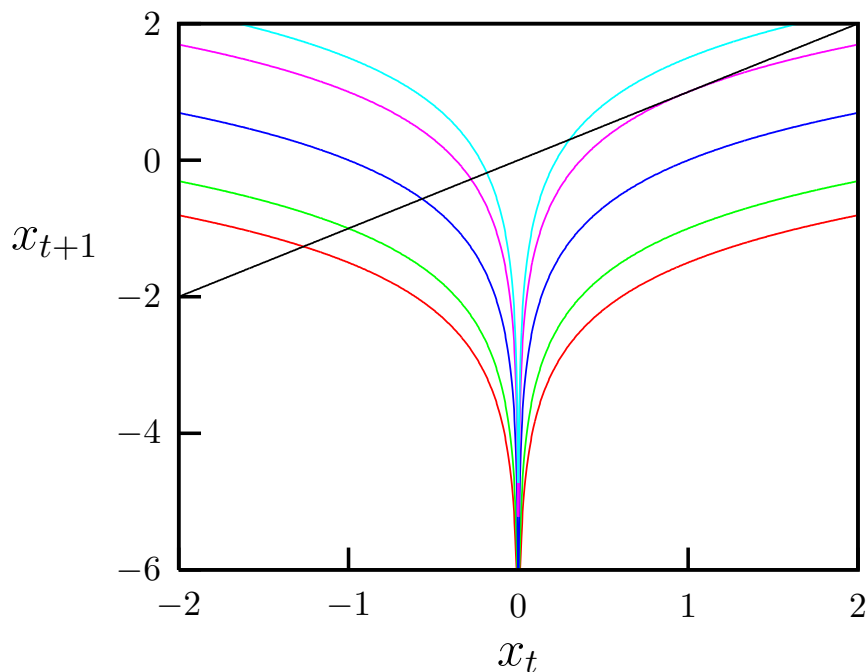


Figura 1.1: Se muestran una serie de curvas correspondientes al mapa logarítmico de la ecuación (1.4) para distintos valores del parámetro de control. Rojo:  $b = -1.5$ , verde:  $b = -1$ , azul:  $b = 0$ , magenta:  $b = 1$  y cian:  $b = 1.5$ . La línea negra representa la recta  $x_{t+1} = x_t$

tado  $x$  no están acotados, es decir que sus rangos son  $-\infty < b < \infty$  y  $-\infty < x < \infty$ . Más adelante mostramos como que el parámetro  $b$  rige el comportamiento de las orbitas.

Para generar las orbitas se itera el mapa logarítmico, ver fig(1.1). Esto consiste en escoger una condición inicial  $x_0$ , a través de la cual se genera el siguiente valor del estado  $x_1$ , con éste último se genera otro  $x_2$  y así sucesivamente. Con los distintos estados se traza la orbita a medida que el tiempo

$t$  transcurre discretamente para todos los enteros positivos. Es importante notar que cada estado futuro depende del estado que le antecede. La tabla (1.1) muestra esta dependencia.

$x_{t+1} = b + \ln x_t $	$t$
$x_1 = b + \ln x_0 $	$t = 0$
$x_2 = b + \ln x_1  = b + \ln b  + \ln \ln x_0  $	$t = 1$
$x_3 = b + \ln x_2  = b + \ln b  + \ln \ln b  + \ln \ln \ln x_0   $	$t = 2$
$x_4 = b + \ln x_3  = b + \ln b  + \ln \ln b  + \ln \ln \ln b    + \ln \ln \ln \ln x_0   $	$t = 3$

Tabla 1.1: Dependencia de cada estado de los estados anteriores.

De forma general se obtiene

$$x_k = b + \ln|x_{k-1}| = b + \ln^{(k)}|x_0| + \sum_{j=1}^{(k-1)} \ln^{(k-j)}|b|, \quad (1.5)$$

para  $t = k - 1$ .

### 1.3 Estabilidad del Mapa Logarítmico

Tomando en cuenta el criterio analítico para el análisis de estabilidad local de los mapas,  $|f'(\bar{x})| < 1$ , y sabiendo que un punto fijo de un mapa cumple con la condición  $f(x) = x$ , determinamos las regiones de estabilidad para el mapa logarítmico utilizando argumentos geométricos. Para ello partimos de la figuras 1.2 donde se muestra, para un valor fijo del parámetro  $b = 1$ , la función del mapa logarítmico, su derivada y la recta  $x = y$ .

En la figura 1.2a apreciamos que, cuando  $b = 1$ , la recta  $y = x$  es tangente

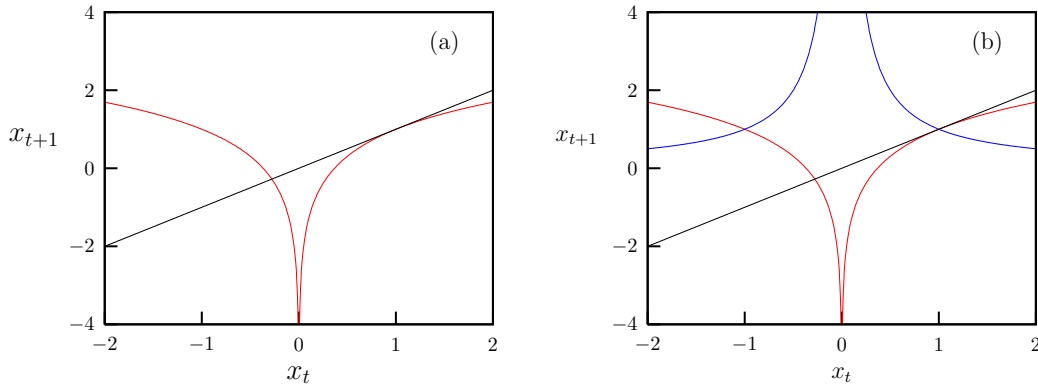


Figura 1.2: Mapa logarítmico  $f(x) = b + \ln|x|$  con  $b = 1$ . En rojo tenemos el diagrama de retorno de la función  $f(x)$ , en azul su primera derivada  $|f'(x)| = 1/|x|$  y en negro la recta  $x=y$ . En el punto  $(1,1)$   $f(x)$  es tangente a la recta e intersecta a su derivada  $f'(x)$ .

a la función del mapa logarítmico  $f(x) = b + \ln|x|$  en el punto  $(1, 1)$ , que es un punto fijo del mapa. Utilizando la definición geométrica de la derivada en un punto, tenemos que la pendiente de  $f(x)$  en el punto  $(1, 1)$  es la misma pendiente que la de la recta  $y = x$ , esto es  $f'(1) = 1$ . Luego si se grafica el valor absoluto de la pendiente de  $f(x)$  en todo punto (ver figura 1.2b), es decir  $|f'(x)| = 1/|x|$ , y teniendo en cuenta que  $|f'(x)|$  es simétrica, tenemos que

$$|f'(x)| < 1 \quad \forall \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \quad (1.6)$$

Es inmediato notar en la figura 1.3 que para  $b > 1$  todo punto fijo estable tal que  $f(x) = y$ , es decir,  $\bar{x} = b + \ln|\bar{x}|$ , están en el intervalo  $\bar{x} \in (1, +\infty)$ . Mientras que para  $b < -1$  los puntos fijos están en el intervalo  $\bar{x} \in (-\infty, -1)$ . Finalmente el comportamiento de orbitas será estable, esto es  $|f'(\bar{x})| < 1$ ,

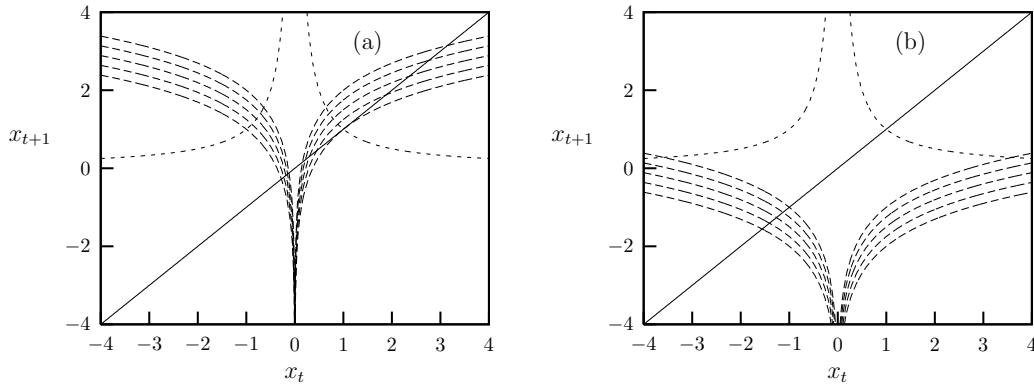


Figura 1.3: Puntos fijos en el diagrama de retorno del mapa logarítmico. En líneas segmentada el diagrama para varios valores del parámetro  $b$ , en línea punteada el valor absoluto de la derivada de la función logarítmica y la línea continua representa la recta  $x = y$ . La intersección de las distintas las gráficas logarítmicas con la recta  $y = x$  representa los puntos fijos. (a) De arriba hacia abajo el parámetro  $b = 2, 1.75, 1.5, 1.25, 1$ . (b) De arriba hacia abajo el parámetro  $b = -1, -1.25, -1.5, -1.75, -2$ . La intersección de las distintas gráficas logarítmicas con la recta  $y = x$  de pendiente 1.

para  $b \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

## 1.4 Comportamiento del Mapa Logarítmico.

Partiendo de lo expuesto en la sección anterior, se puede dividir el comportamiento del mapa en tres regiones de acuerdo a su estabilidad: una región estable  $b \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , una región inestable  $b \in (-1, 1)$ , y una última región que describe que ocurre en la frontera de estas dos regiones, es decir cuando  $b$  tiende a  $-1$ ,  $b \rightarrow -1$ ; y  $b$  tiende a  $1$ ,  $b \rightarrow 1$ , denominada región crítica.



### 1.4.1 Región estable $b \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Con el fin de explorar como es el comportamiento de la región estable, la figura 1.4 muestra la iteración del mapa logarítmico, teniendo como condición inicial  $x_0=0.2$  y el parámetro de control  $b = -1.5$ . Note que el proceso de

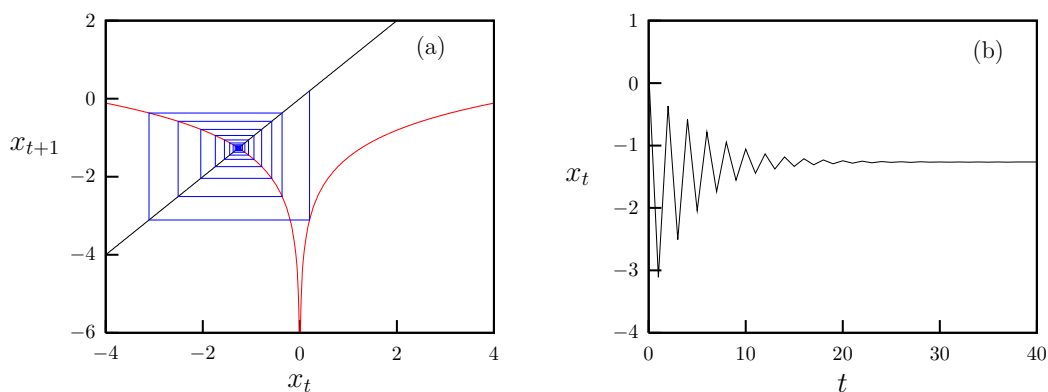


Figura 1.4: Iteración del mapa logarítmico para  $b=-1.5$  y la condición inicial  $x_0 = 0.2$ . (a) Diagrama de retorno donde se muestra en rojo el mapa logarítmico, en azul el proceso de iteración del mapa y en negro la recta  $x = y$ . (b) Evolución temporal del estado del mapa.

iteración, figura 1.4a, converge hacia el punto de la recta  $y = x$  donde ésta corta a la curva del mapa logarítmico  $x_{t+1} = b + \ln|x_t|$ . En la serie de tiempo, figura 1.4b, los estados se obtienen de la dinámica del sistema a medida que las iteraciones transcurren y se observa como para cierto número de iteraciones la órbita se estabiliza en un punto fijo.

Al variar la condición inicial a  $x_0 = 0.6$ , dejando constante el parámetro de control en  $b = -1.5$ , obtiene la figura 1.5. Aunque la condición inicial es 3 veces más grande que para el caso anterior, las dos órbitas se estabilizan en

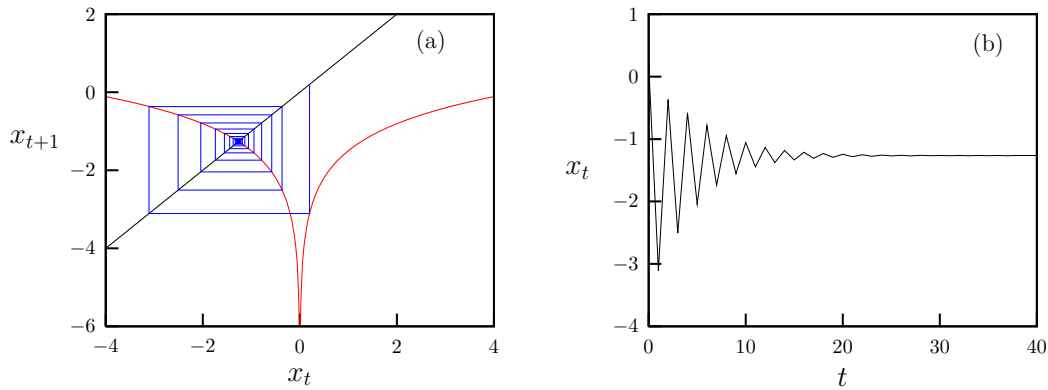


Figura 1.5: Iteración del mapa logarítmico para  $b=-1.5$  y la condición inicial  $x_0 = 0.2$ . (a) Diagrama de retorno donde se muestra en rojo el mapa logarítmico, en azul el proceso de iteración del mapa y en negro la recta  $x = y$ . (b) Evolución temporal del estado del mapa.

el mismo punto fijo como lo muestra la figura 1.6a. Repitiendo este mismo procedimiento para otros valores de  $b$ , tales que  $b \in (-\infty, -1)$  se tiene que las orbitas convergen a un mismo punto fijo para cada  $b$ , independientemente de su condición inicial.

Para la región estable  $b \in (1, \infty)$  la curva que corresponde a el mapa logarítmico  $x_{t+1} = b + \ln|x_t|$ , corta con la recta  $y = x$ , en dos puntos uno estable y otro inestable. En estas condiciones, para cada valor de  $b \in (1, \infty)$  las trayectorias convergen al punto estable, independientemente de su condición inicial. Para ilustrar este hecho la figura 1.6b muestra dos orbitas con un mismo  $b$ , pero con condiciones iniciales distintas.

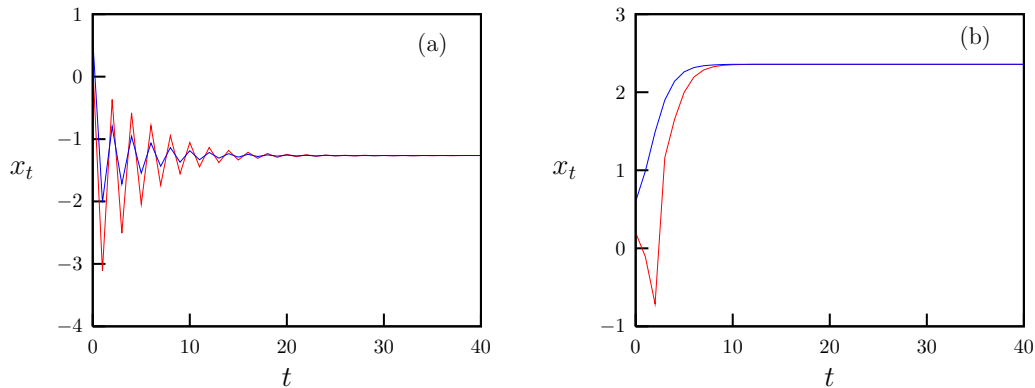


Figura 1.6: Orbitas del mapa logarítmico para el parámetro de control fijo y con dos condiciones iniciales distintas  $x_0 = 0.2$  y  $x_0 = 0.6$ . (a)  $b = -1.5$ , (b)  $b = 1.5$ .

### 1.4.2 Región Crítica (Transición al caos)

El cambio de la región estable a la inestable viene dado entorno a dos puntos  $b = -1$  y  $b = +1$ . En cada uno de ellos ocurre una transición al caos, pero con características diferentes.

#### Bifurcación tangente inversa

En la región entorno a  $b = +1$ , ocurre una bifurcación tangente inversa. Para comprenderla comencemos con  $b > 1$  en donde existen dos puntos fijos uno estable,  $x_e$ , y uno inestable,  $x_i$ , como se muestra en la figura 1.7a. A medida que se disminuye el valor del parámetro  $b$  los puntos  $x_e$  y  $x_i$  se acercan, hasta que se encuentran en un mismo punto,  $x_c$ , cuando  $b = +1$  (ver figura 1.7b), es entonces cuando ocurre una transición al caos por vía bifurcación tangente inversa. Si  $b$  continua disminuyendo,  $b < 1$ , no se encuentran puntos fijos

estables como lo muestra la figura 1.7c.

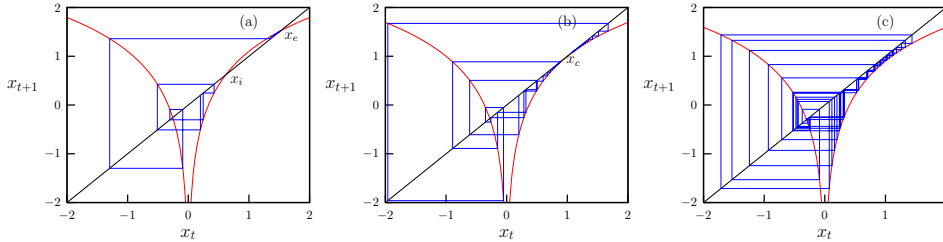


Figura 1.7: Diagrama de iteración del mapa logarítmico para una misma condición inicial  $x_0 = 0.2$  y tres valores del parámetro  $b$ . (a)  $b = 1.1$  y se muestran los dos puntos fijos que intervienen en la transición  $x_e$  y  $x_i$ . (b)  $b = 1$  y se indica el punto fijo  $x_c$ , donde los puntos fijos  $x_i$  y  $x_e$  convergen obteniendo una transición al caos por la ruta de bifurcación tangente inversa. (c)  $b = 0.9$  y el punto fijo estable ya ha desaparecido.

Esta transición al caos se llama intermitencia y está caracterizada por la ocurrencia de una señal de fase regular grande, llamada laminar; interrumpida alternativamente por ráfagas irregulares relativamente cortas. Este fenómeno fue estudiado por Pomeau y Manneville [4].

En particular esta intermitencia se conoce como intermitencia tipo I. Para comprenderla volvamos a la figura 1.7c. Note que en esta figura no hay puntos fijos estables y la recta  $y = x$  junto con la curva que representa el mapa logarítmico  $x_{t+1} = b + \ln|x_t|$  forman un túnel angosto. El número de iteraciones necesarias para cruzar este túnel aumenta a medida que el túnel se haga más angosto y a su vez el valor del estado del mapa,  $x$ , no cambia drásticamente. En consecuencia la fase regular o laminar será más grande a medida que  $b \rightarrow 1$  por la izquierda. Mientras, se necesita un gran número de iteraciones para atravesar el túnel, al salir de éste ocurren unas pocas

iteraciones donde el estado varía significativamente hasta que la trayectoria ingresa nuevamente al túnel. Lo cual produce fases regulares largas interrumpidas por fases caóticas cortas, como se muestra en la figura 1.8. Esta transición al caos se debe a que existe una bifurcación de tangente inversa.

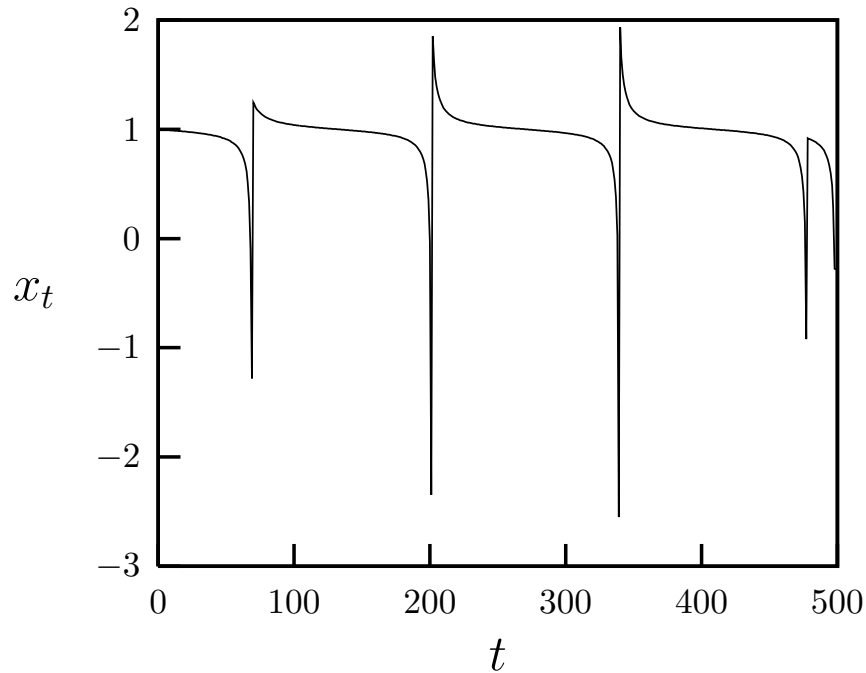


Figura 1.8: Representación para  $b=0.999$  y  $x_0=1$  de la serie de tiempo para el mapa logarítmico en la que se presenta una región laminar en torno al punto  $x=1$ . Se puede notar que las fases regulares ocurren en intervalos de tiempo más largos que en las fases irregulares.

### Bifurcación de periodo doble inversa

Cuando el mapa logarítmico toma valores de  $b$  aproximados a  $b=-1$ , ocurre una bifurcación de periodo doble inversa, lo cual, se puede verificar grafican-

do,

$$f(x) \circ f(x) = f(f(x)) = f^{(2)}(x) = b + \ln|x| + \ln|\ln|x|| .$$

La intersección del mapa compuesto consigo mismo con la recta, se muestra en la figura 1.9a y nos permite encontrar tres puntos críticos: dos puntos de una orbitas de período dos inestables,  $x_{i1}$  y  $x_{i2}$ , y un punto fijo,  $x_c$ . En el mapa logarítmico la bifurcación de periodo doble inversa ocurre como se describe a continuación: para valores del parámetro  $b < -1$  se tienen dos puntos de la orbita de período dos inestables,  $x_{i1}$  y  $x_{i2}$ , luego a medida que  $b \rightarrow -1$  estos dos puntos se aproximan cada vez más al punto estable  $x_c$ , como se muestra en la figura 1.9b. Cuando  $b = -1$  los dos puntos de la orbita inestable se solapan con el punto estable convirtiendolo a este último punto en inestable como se aprecia en la figura 1.9c.

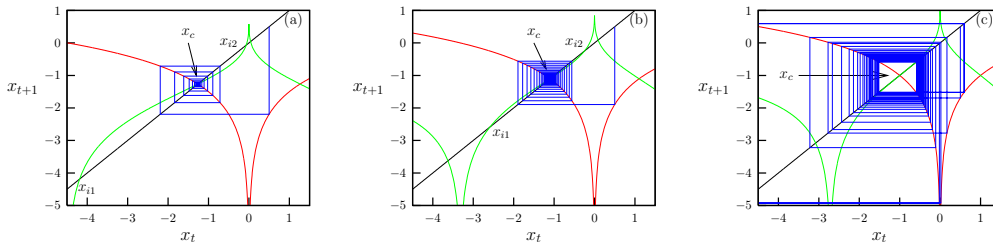


Figura 1.9: Diagrama de recurrencia del mapa logarítmico para tres valores del parámetro  $b$  y condición inicial  $x_0 = -0.5$ . En verde se muestra la curva  $f^2(x)$  para la localización de los puntos  $x_{i1}$  y  $x_{i2}$  de la orbita de período dos inestable y el punto fijo  $x_c$  estable. (a)  $b = -1.5$ , (b)  $b = -1.2$  y (c)  $b = 1.0$ .

Cuando  $b \rightarrow -1 \forall b > -1$  se tiene un único punto fijo inestable  $x_{ci}$ ,

alrededor de este punto se forman numerosas iteraciones que producen trayectorias regulares (régimen laminar), las cuales se van alejando del punto fijo haciéndose inestables durante unas pocas iteraciones, siendo éstas suficientes para que la trayectoria se aproxime nuevamente a la vecindad del punto  $x_{ci}$  y retornen al régimen laminar, como se muestra en la figura 1.10. A este comportamiento intermitente se le conoce como intermitencia de tipo III.

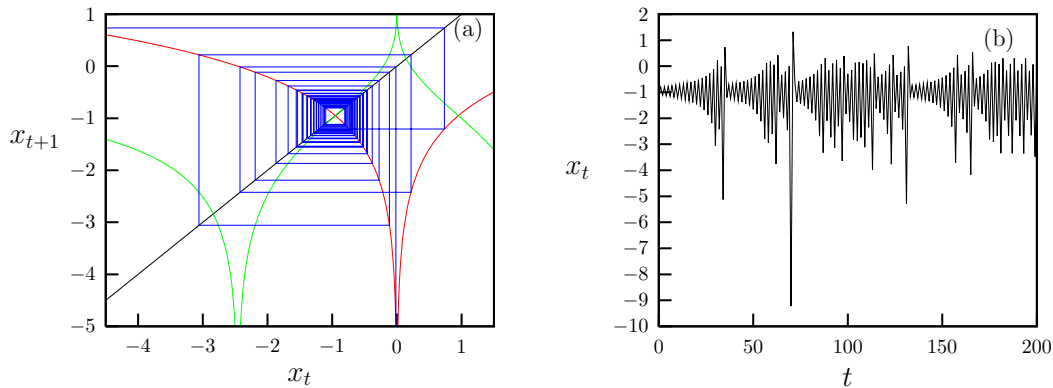


Figura 1.10: Intermitencia de tipo III en el mapa logarítmico para  $b = -0.9$  y condición inicial  $x_0 = -1$ . (a) Diagrama de iteración. (b) Evolución temporal del estado.

### 1.4.3 Región Inestable $b \in (-1, 1)$

La dinámica del mapa logarítmico en este rango se caracteriza por ser caótica. Para cualquier valor de  $b \in (-1, 1)$  las orbitas del mapa logarítmico muestran sensibilidad a las condiciones iniciales por lo que las trayectorias acaban divergiendo rápidamente. Un ejemplo de este hecho es representado en la

figura 1.11, donde se muestra la evolución temporal de dos orbitas cuyas condiciones iniciales difieren en  $10^{-9}$ .

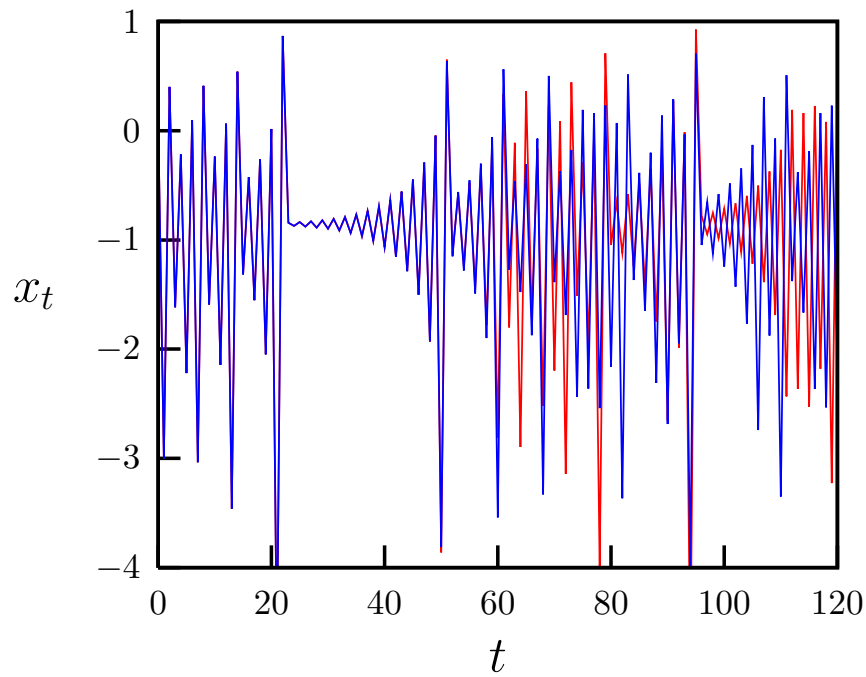


Figura 1.11: Comparación de la evolución temporal de dos trayectorias del mapa logarítmico con  $b = -0.7$  y condiciones iniciales  $x_0 = 0.1$  para la trayectoria roja y  $x_0 = 0.100000001$  para la trayectoria azul. Se aprecia que al inicio, ambas trayectorias se solapan entre sí. Sin embargo, al poco tiempo se observa una separación entre las órbitas. A esta diferencia en el tiempo de las trayectorias se le conoce como sensibilidad a las condiciones iniciales y es la causa de la pérdida de predictibilidad del sistema.



## 1.5 Diagrama de bifurcación

Los diagramas de bifurcación presentan los puntos asintóticos de las sucesivas iteraciones del mapa para diferentes valores del parámetro de control. Esto posibilita identificar los cambios cualitativos de la dinámica del mapa logarítmico al variar su parámetro  $b$ . La figura 1.12 muestra el diagrama de bifurcación correspondiente al mapa logarítmico. Note que el mapa logarítmico

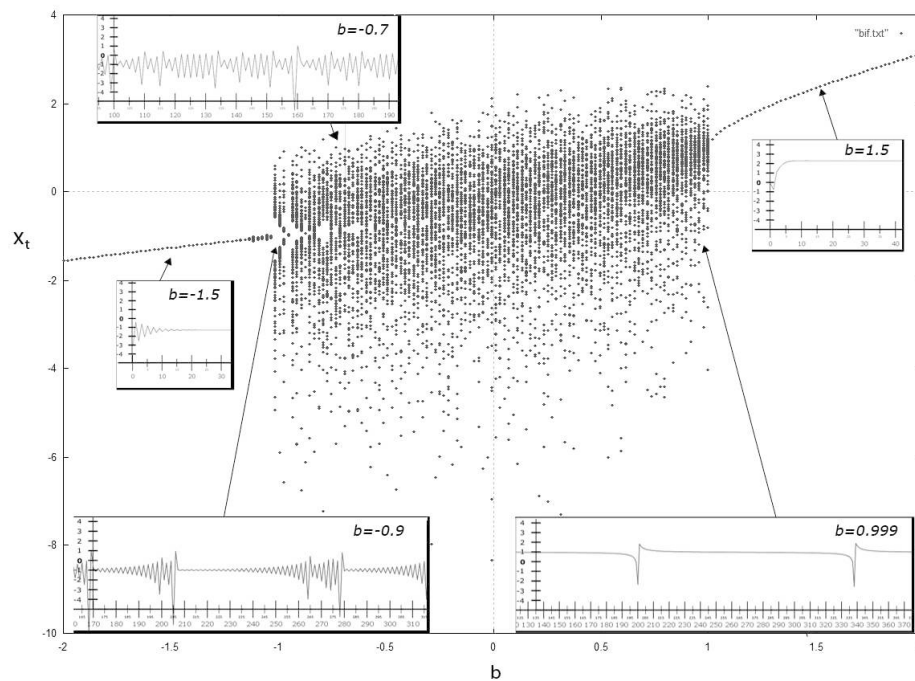


Figura 1.12: Diagrama de bifurcación para el mapa Logarítmico. Realizado numéricamente. Se realizaron 190 iteraciones para cada valor  $b$  del mapa, graficando solamente los valores de las últimas 90 y despreciando las primeras 100 iteraciones. De una forma global se aprecian las regiones estables para  $b \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  e inestable  $(-1, 1)$ , donde el mapa presenta un comportamiento caótico.

mico no presenta la ruta de Feigenbaum al caos. La ruta hacia el caos es a través de las intermitencias tipo I y III como lo indican las series de tiempo insertadas en la figura.

## 1.6 Exponente de Lyapunov

Este exponente permite medir la estabilidad de un sistema dinámico, viene dado por la siguiente expresión,

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(x_n)|.$$

El exponente de Lyapunov revela que tanta sensibilidad presenta el sistema a las condiciones iniciales para un determinado valor del parámetro de control. Si el exponente de Lyapunov es positivo, las perturbaciones pequeñas en la condición inicial tenderán a ser amplificadas y el sistema será inestable y caótico. En cambio, si el exponente es negativo, entonces las perturbaciones pequeñas tienden a ser reducidas, entonces el sistema será estable. Para estudiar el efecto que tiene el parámetro de control  $b$  en la estabilidad del mapa logarítmico, se calcula el exponente de Lyapunov que se muestra en la figura 1.13. Se aprecia que en el intervalo  $b \in (-1, 1)$  el exponente de Lyapunov,  $\lambda$ , es siempre positivo, por lo que en este rango se corrobora que el comportamiento es caótico. Es también evidente, que no hay ventanas de periodicidad y bandas caóticas, dado que no aparecen valores nulos o

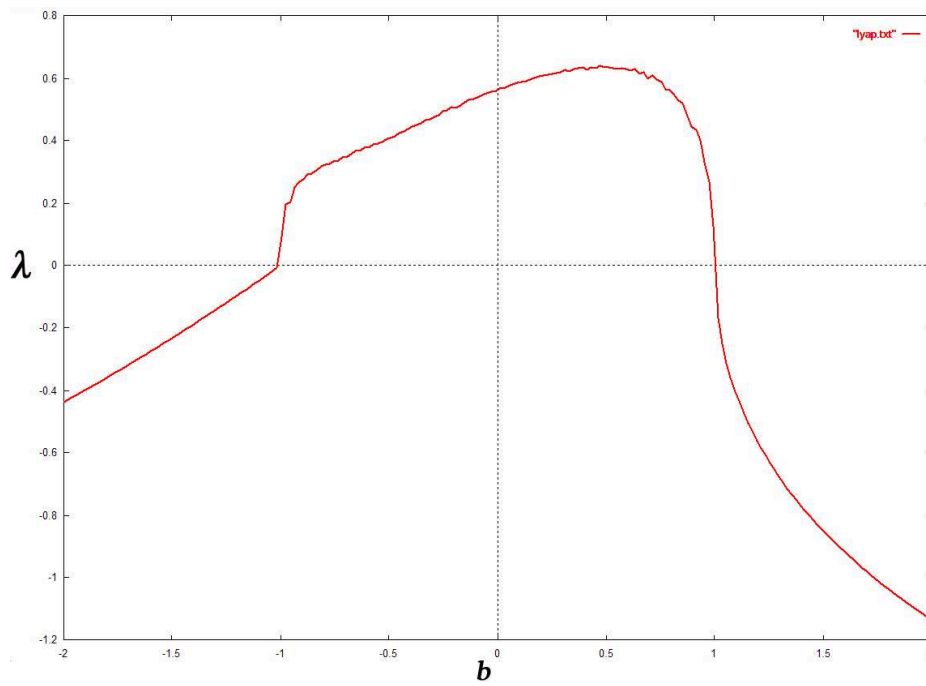


Figura 1.13: Exponente de Lyapunov del mapa logarítmico. Para cada valor del parámetro  $b$  se realizaron 10.000 iteraciones, despreciando las 100 primeras iteraciones y tomando los 99900 estados para calcular el exponente.

negativos del  $\lambda$  en el intervalo  $b \in (-1, 1)$  que indicarían presencia de orbitas periódicas.

## Capítulo 2

# Sistemas Espacio-temporales

En numerosos sistemas como los ecosistemas biológicos, reacciones químicas, turbulencia en fluidos, formación de patrones, entre otros; la evolución no sólo se produce en el tiempo sino también en el espacio. En estos sistemas, que se conoce como sistemas extendidos o espacio-temporales, los grados de libertad dependen tanto del espacio como del tiempo, y el comportamiento impredecible, puede aparecer tanto en la dimensión espacial como en la temporal. Una pequeña perturbación al sistema ya no sólo modifica la trayectoria temporal del sistema, sino también su comportamiento espacial.

Según el sistema que se pretenda estudiar, es posible determinar las ecuaciones exactas, pero la mayoría de las veces resulta difícil resolverlas analíticamente, por lo que una alternativa es utilizar modelos dinámicos. Entre los modelos dinámicos más conocidos tenemos las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), las redes de mapas acoplados (RMA) y los autómatas celu-

lares (AC). La tabla (2) muestra las principales características de cada uno de ellos, y se aprecia que las redes de mapas acoplados son un caso intermedio entre las ecuaciones diferenciales parciales y los autómatas celulares.

Modelo	Estado	Tiempo	Espacio
EDP	Continuo	Continuo	Continuo
RMA	Continuo	Discreto	Discreto
AC	Discreto	Discreto	Discreto

Tabla 2.1: Características de algunos modelos dinámicos.

## 2.1 Redes de Mapas Acoplados

El estudio de sistemas extendidos, generalmente descritos por ecuaciones en derivadas parciales, se pueden simplificar considerando modelos discretos en tiempo y espacio, como lo son las Redes de mapas acoplados (RMA) o Coupled Map Lattices (CML en inglés). Las RMA fueron introducidas en 1984 por Kunihiko Kaneko [9] y Waller y Kapral [10], y desde entonces, fenómenos relacionados a la mecánica de fluidos, sistemas químicos de reacción-difusión, dinámica de poblaciones, formación de patrones y redes biológicas, entre otros, han sido estudiados a través de este tipo de modelos de sistemas extendidos. La mayoría de los estudios se han realizado en redes espacialmente homogéneas. Sin embargo, se pueden considerar mapas en redes espacialmente no homogéneas tales como redes con geometría fractal [11, 12] y redes jerárquicas [13]. Por otro lado, también se han es-

tudiado redes con interacciones aleatorias entre los mapas [14, 15], donde la distribución espacial carece de sentido.

En este trabajo se emplearan las redes de mapas logarítmicos con acoplamiento aleatorio no local, para estudiar como el fenómeno de sincronización se ve afectado debido a la variación de la fracción de enlaces asimétricos entre celdas. Este punto será explicado, más adelante.

Las redes de mapas acoplados son modelos donde el tiempo y espacio son discretos. Están constituidas por un conjunto de elementos, los cuales poseen un espectro continuo que evoluciona según un mapa. Este tipo de red será de interés para el desarrollo de este trabajo, por ahora se escribirá su forma general definida como:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + \sum_{j \in \nu_i} g(x_t^j), \quad (2.1)$$

donde,  $x_t^i$  es la variable de estado continua del elemento o celdas  $i$  en el tiempo discreto  $t$ ,  $i = 1, \dots, \mathbf{N} \in \mathbb{Z}^+$  es el índice que identifica cada uno de los  $\mathbf{N}$  elementos de la red,  $f(x_t^i)$  es una función que representa la dinámica local y el término  $g(x_t^i)$  es una función que determina la influencia que tiene sobre el elemento  $i$  — *esimo* el conjunto de vecinos  $\nu_i$ . La sumatoria se lleva a cabo en los elementos  $j$  que forman la vecindad  $\nu_i$  del elemento  $i$ .

## 2.2 Construcción de una RMA a partir de la Ecuación Reacción-Difusión

Discretizando la ecuación de reacción difusión unidimensional se puede obtener una RMA unidimensional con acoplamiento local difusivo. Tomando la EDP de reacción difusión unidimensional;

$$\frac{\partial x(r, n)}{\partial n} = R(x(r, n)) + \gamma \frac{\partial^2 x(r, n)}{\partial r^2}, \quad (2.2)$$

donde,  $R(x(r, n))$  es la función local y  $\gamma$  es el coeficiente difusivo. La función continua  $x(r, n)$  depende de las variables continuas de espacio ( $r$ ) y tiempo ( $n$ ). Para obtener intervalos discretos se utiliza la definición de derivada sin tomar su límite, es decir que la aproximación de la derivada temporal viene dada por,

$$\frac{\partial x(r, n)}{\partial n} \approx \frac{x(r, n + \Delta n) - x(r, n)}{\Delta n}. \quad (2.3)$$

De igual forma se procede con la primera derivada espacial redefiniéndose el intervalo  $\Delta r$  de manera tal que se obtienen dos intervalos  $\Delta r/2$  con respecto a  $r$ , como se muestra la figura 2.1.

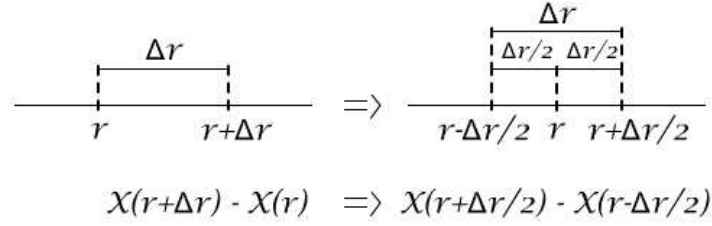


Figura 2.1: Diagrama de la discretización de la derivada espacial.

Por lo tanto la derivada espacial discreta queda expresada como,

$$\frac{\partial x(r, n)}{\partial r} \approx \frac{x(r + \Delta r, n) - x(r, n)}{\Delta r} \Rightarrow \frac{1}{\Delta r} [x(r + \Delta r/2, n) - x(r - \Delta r/2, n)]. \quad (2.4)$$

Luego, simplificando la segunda derivada espacial tenemos,

$$\frac{\partial^2 x(r, n)}{\partial r^2} \approx \frac{1}{\Delta r} \left[ \frac{\frac{x(r+\Delta r, n) - x(r, n)}{\Delta r} - x(r, n) - x(r - \Delta r, n)}{\Delta r} \right]. \quad (2.5)$$

Agrupando términos se obtiene,

$$\frac{\partial^2 x(r, n)}{\partial r^2} \approx \frac{1}{\Delta r} \left[ \frac{x(r + \Delta r, n) + x(r - \Delta r, n) - 2x(r, n)}{\Delta r} \right], \quad (2.6)$$

finalmente,

$$\frac{\partial^2 x(r, n)}{\partial r^2} \approx \frac{x(r + \Delta r, n) + x(r - \Delta r, n) - 2x(r, n)}{\Delta r^2}. \quad (2.7)$$

Definiendo  $\Delta n = 1, \Delta r = 1, r = i \in \{Z^+\}$  y  $n = t \in \{Z^+\}$  obtenemos la



forma discreta de la ecuación (2.2),

$$x(i, t + 1) - x(i, t) = R(x(i, t)) + \gamma(x(i + 1, t) + x(i - 1, t) - 2x(i, t)) \quad (2.8)$$

Cambiando notación,  $x(i, t) = x_t^i$ , se tiene,

$$x_{t+1}^i - x_t^i = R(x_t^i) + \gamma(x_t^{i+1} + x_t^{i-1} - 2x_t^i)$$

. Despejando  $x_{t+1}^i$  obtenemos,

$$x_{t+1}^i = x_t^i + R(x_t^i) + \gamma(x_t^{i+1} + x_t^{i-1} - 2x_t^i), \quad (2.9)$$

Luego, sustituyendo  $\gamma = \epsilon/2$  se tiene,

$$x_{t+1}^i = x_t^i - \epsilon x_t^i + R(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2}(x_t^{i+1} + x_t^{i-1}) \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es un caso particular de la ecuación (2.1), tal como se muestra en la siguiente expresión,

$$x_{t+1}^i = \underbrace{(1 - \epsilon)x_t^i + R(x_t^i)}_{f(x_t^i)} + \underbrace{\frac{\epsilon}{2}(x_t^{i+1} + x_t^{i-1})}_{\sum_{j \in \nu_i} g(x_t^j)} \quad (2.11)$$

Llegando así, a partir de la ecuación diferencias en derivadas parciales a una red de mapas acoplados unidimensional. De la ecuación (2.11) se puede

plantear una RMA unidimensional del tipo,

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{2}(f(x_t^{i+1}) + f(x_t^{i-1})) . \quad (2.12)$$

La RMA de la ecuación (2.12) modela la evolución de un sistema dinámico donde el estado futuro de cada elemento  $i$ , depende de su estado actual y de sus vecinos inmediatos con una fuerza de acoplamiento proporcional a  $\epsilon$ . Para este trabajo nos interesa una RMA de este tipo, pero con el acoplamiento entre elementos diferente. Más adelante se desarrollara este punto.

Es preciso aclarar que generalmente las RMA no se obtienen de la discretización de ecuaciones continuas específicas, sino que se construyen mediante la introducción de parámetros dinámicos para así capturar características globales del comportamiento del sistema que se esté estudiando. Esta estrategia para el planteamiento de las RMA se enmarca dentro de lo que se llama modelado constructivista [5].

Pasos para construir una Red de Mapas Acoplados:

- ★ Para los parámetros que se quieren estudiar se escoge un conjunto de variables a escala macroscópica que sean relevantes en su evolución, por ejemplo: temperatura, flujo, concentración de una sustancia química, etc. La dimensión y topología de la red debe ser escogida de acuerdo al espacio físico a estudiar.
- ★ Se plantean las reglas que rijan la forma en que las variables se interconectan

★ Finalmente, se obtiene la regla dinámica y se itera.

La ventaja de la utilización de este tipo de modelos surge al discretizar las variables espacio y tiempo lo que trae como consecuencia que se puedan manejar eficientemente con herramientas computacionales.

## 2.3 Redes, Matrices y Acoplamiento

Una RMA regular  $d$ -dimensional, como la unidimensional de la ecuación (2.12) se puede escribir de la forma vectorial como,

$$\mathbf{x}_{t+1} = (1 - \epsilon)\mathbf{f}(x_t) + \frac{\epsilon}{2d}\mathbf{M}\mathbf{f}(x_t), \quad (2.13)$$

en donde,  $\mathbf{x}_{t+1}$  y  $\mathbf{f}(x_t)$  son vectores columnas y  $\mathbf{M}$  es la matriz de acoplamiento de dimensión  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ , siendo  $\mathbf{N}$  el número de celdas o elementos que componen la RMA. Expresando la ecuación (2.13) en sus componentes se tiene,

$$\begin{pmatrix} x_{t+1}^1 \\ x_{t+1}^2 \\ \vdots \\ x_{t+1}^i \end{pmatrix} = (1 - \epsilon) \begin{pmatrix} f(x_t^1) \\ f(x_t^2) \\ \vdots \\ f(x_t^i) \end{pmatrix} + \frac{\epsilon}{2d} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f(x_t^1) \\ f(x_t^2) \\ \vdots \\ f(x_t^i) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

El conjunto de elementos  $M_{ij}$  de la fila  $i$  que son distintos de cero  $\{\nu_i\}$  constituyen la vecindad del elemento  $i$ . Este conjunto contiene a los  $k_i$  elementos

vecinos de  $i$ , donde  $k_i \leq \mathbf{N}$ . Para el ejemplo de la ecuación (2.14) el acoplamiento es local y las condiciones de contorno son periódicas, por lo que  $k_i$  es constante, es decir  $k_i = k = 2$ .

La matriz de acoplamiento  $\mathbf{M}$  contiene toda la información sobre la topología de la red, es decir, su dimensión y tipos de conectividad. Al igual que en los operadores espaciales continuos ( $\nabla, \nabla^2$ ) la matriz de acoplamiento actúa como un operador espacial lineal, con la ventaja de ser un operador matricial discreto que permite ser aplicado a modelos de fenómenos espacialmente heterogéneos o con interacciones complejas donde la resolución de EDP es engorrosa.

## 2.4 Tipos de Conectividad

La matriz  $\mathbf{M}$  de la ecuación (2.14) representa un acoplamiento local entre elementos, es decir, la vecindad está constituida por los elementos más próximos a cada elemento  $i$  del sistema. Existen otros tipos de acoplamiento, como por ejemplo aquel en el que cada elemento interactúa con todos los elementos o celdas que forman el sistema, llamado acoplamiento global. Este acoplamiento se traduce en una matriz unitaria de acoplamiento y en estos sistemas carece de sentido definir la ubicación espacial de los elementos que conforman la red. Las matrices que representan los acoplamientos locales y globales, al ser simétricas y reales poseen un conjunto completo y ortogonal de autovectores de  $\mathbf{M}$  tal que;  $\mathbf{M}u_i = \mu u_i$ . Entonces, conociendo los auto-

vectores las matrices pueden diagonalizarse, lo que a su vez significa conocer los autovalores. En estos casos la RMA puede escribirse en función de sus autovalores, con lo cual se obtiene un conjunto de mapas desacoplados en otro espacio [15, 16, 17, 18] de la siguiente forma:

Sea un conjunto de mapas acoplados por la matriz  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{x}_{t+1} = (1 - \epsilon)\mathbf{f}(x_t) + \frac{\epsilon}{k}\mathbf{M}\mathbf{f}(x_t), \quad (2.15)$$

con la intención de diagonalizar  $\mathbf{M}$  se realiza un cambio de variables de  $\mathbf{x}^i$  a las nuevas coordenadas  $\mathbf{y}^i$ ,

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}_t \rightarrow y_t^i = \sum_j U_{ji}x_t^j \quad \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_t) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_t) \rightarrow \hat{f}(y_t^i) = \sum_j U_{ji}\mathbf{f}(x_t^j),$$

y recíprocamente tenemos,

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{U}\mathbf{y}_t \rightarrow x_t^i = \sum_j U_{ij}y_t^j \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) = \mathbf{U}\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_t) \rightarrow \mathbf{f}(x_t^i) = \sum_j U_{ij}\hat{f}(y_t^j).$$

La matriz  $\mathbf{U}$  está formada por los autovectores  $u_i$  por lo que  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

Multiplicando la ecuación (2.15) por  $\mathbf{U}^{-1}$  tenemos,

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}_{t+1} = (1 - \epsilon)\mathbf{U}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_t) + \frac{\epsilon}{k}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}_t)}_{\mathbf{U}\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_t)}$$

utilizando el cambio de variable se obtiene,

$$\mathbf{y}_{t+1} = (1 - \epsilon)\hat{f}(\mathbf{y}_t) + \frac{\epsilon}{k}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{U}\hat{f}(\mathbf{y}_t) , \quad (2.16)$$

donde,  $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{U}$  es una matriz diagonal cuya traza esta compuesta por los autovalores  $\mu_i$  de la matriz  $\mathbf{M}$ . La forma no vectorial de la ecuación (2.16) viene dada por,

$$y_{t+1}^i = (1 - \epsilon)\hat{f}(y_t^i) + \frac{\epsilon}{k}\mu_i\hat{f}(y_t^i) , \quad (2.17)$$

desacoplando de esta forma la red en  $\mathbf{N}$  mapas independientes. De esta forma se pueden desacoplar las RMA, lo cual permite estudiar la sincronización de redes acopladas localmente y globalmente por medio de un análisis de estabilidad lineal. Estudios de este tipo se han realizado con mapas logarítmicos [17, 19].

El acoplamiento usado en las RMA de este trabajo es aleatorio, que es un caso intermedio entre los dos tipos de acoplamientos anteriores. Con el acoplamiento aleatorio la noción geométrica del espacio se pierde y en contraste de lo que ocurre con las matrices que conmutan con su conjugada hermética (como las matrices simétricas, hermítica, unitarias, etc.), no existen propiedades generales demostradas para matrices arbitrarias aleatorias. Para determinar los autovalores y autovectores en este tipo de matrices se utilizan métodos numéricos que pueden ser aplicados a través de paquetes computacionales.

Según el teorema de Gershgorin [20], en matrices aleatorias el autovalor más

grande le corresponde al autovector homogéneo. Ahora bien, cuando ocurre sincronización implica que existe un autovector homogéneo para la matriz de acoplamiento aleatorio, entonces por el teorema de Gershgorin, a este autovector le corresponde el autovalor más grande. Gade [14] demuestra tanto en una prueba formal como numéricamente que el autovalor más grande es la conectividad de la red  $k$ , y que para los  $N - 1$  autovectores restantes los autovalores son del orden de  $\sqrt{k}$  o menores. A su vez Gade también muestra que el hecho de que el espectro de autovalores sea discreto con un gap finito trae como consecuencia que se genere estructura coherente.

## 2.5 Sincronización

El primero en describir y entender un fenómeno de sincronización fue Christian Huygens en el siglo XVII. Huygens observó dos relojes de péndulo de su propia invención, dado que la precisión de sus mecanismos todavía no estaba muy desarrollada, cada uno exhibía por separado una frecuencia de oscilación apreciablemente distinta. Sin embargo, estando ambos colgados en la misma pared, notó que durante horas que los péndulos de los relojes estaban sincronizados. Huygens intuyó que eran las vibraciones que se transmitían por la pared donde ambos relojes estaban colgados lo que los sincronizaba. Así que colocó uno de los relojes en otra pared y observó que al poco tiempo se desincronizaban. El acoplamiento de los relojes de péndulo a través de la pared generaba la sincronización entre ellos.

Interesantes ejemplos de sincronización pueden ser observados en la naturaleza como es el caso de las luciérnagas macho, quienes emiten pulsos de luz. Cada luciérnaga posee una especie de oscilador, en donde la frecuencia de oscilación se ajusta en respuesta a los destellos de las otras luciérnagas. Miles de luciérnagas logran sincronizar sus frecuencias emitiendo un pulso de luz de gran intensidad con la intención de llamar la atención de las hembras que están a largas distancias. Otro ejemplo, semejante son los de los grillos, quienes por medio del chirrido (sonido agudo) sincronizado producido por sus alas atraen a las hembras. En diferentes disciplinas también se ha estudiado el fenómeno de sincronización, en biología y medicina un ejemplo son las neuronas, las cuales bajo ciertas condiciones se sincronizan produciendo un ataque de epilepsia. Un caso familiar es nuestro corazón, que está constituido por células musculares las cuales, al estar acopladas sincronizan sus frecuencias para producir los latidos.

El entendimiento de cómo un comportamiento sincronizado puede emerger en un sistema dinámico acoplado no fue obtenido hasta los trabajos pioneros de A.T. Winfree [21, 22] y Y. Kuramoto [23, 24] y las condiciones bajo las cuales un sistema acoplado está sincronizado fue identificado por R. Mirollo y S.H. Strogatz [25]. Incluso, se han encontrado que sistemas caóticos pueden sincronizarse [26]. Dado que el estudio de sincronización en sistemas dinámicos en tiempo continuo es a veces intratable desde un punto de vista analítico, la sincronización es también estudiada con redes de mapas [27, 28].



### Sincronización en redes de mapas acoplados

Los elementos o mapas de la red se encuentran sincronizados cuando todos los elementos de la red exhiben orbitas iguales mientras el tiempo transcurre, esto es,

$$|x_t^i - x_t^j| \forall i, j, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Esta definición puede ser aplicada para orbitas periódicas o caóticas.

#### 2.5.1 Mapas Logarítmicos Acoplados Aleatoriamente

Los modelos basados en mapas acoplados aleatoriamente, a diferencia de los modelos espacialmente ordenados, son adecuados para representar sistemas desordenados como por ejemplo redes neuronales, poblacionales, circuitos electrónicos, etc. Las RMA con acoplamiento aleatorio son sistemas de alta dimensionalidad donde el espacio resulta irrelevante por lo que la geometría y el entorno local pierden sentido. En este tipo de RMA se ha relacionado unívocamente el surgimiento de comportamiento colectivo no trivial con la conectividad  $k$  de la red [14, 15]. En nuestro caso, se define un nuevo parámetro que permite medir la relación entre enlaces simétricos y asimétricos en la matriz de acoplamiento aleatoria. Vemos de esta forma cómo influye este nuevo parámetro en la emergencia de sincronización en el sistema. Para ello se considera un conjunto de mapas acoplados  $i = 1 \dots N$ , con  $N = 10^4$

y cuyas reglas de evolución están dadas por,

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{k_i} \sum_{j \in \nu_i} f(x_t^j), \quad (2.19)$$

o en forma vectorial,

$$\mathbf{x}_{t+1} = (1 - \epsilon)\mathbf{f}(x_t) + \epsilon\mathbf{R}\mathbf{f}(x_t). \quad (2.20)$$

La dinámica de la celda  $i$  ya no depende sólo de su estado sino también de la contribución del conjunto de sus vecinos  $\nu_i$ , los cuales son escogidos al azar, que a su vez está escalada mediante una constante de acoplamiento  $\epsilon$  y el número de vecinos  $k_i$ . Cada celda  $i$  está acoplada aleatoriamente con  $k_i$  celdas o elementos. Las componentes de la matriz  $\mathbf{R}$  son  $R_{ij} = \frac{1}{k_i}M_{ij}$  y el acoplamiento de cada elemento con sus vecinos está descritos en la matriz  $\mathbf{M}$  que está compuesta por  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$  elementos, los cuales pueden tomar los valores 0 ó 1. De esta forma  $\mathbf{R}$  viene dada por,

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_2} & 0 & \frac{1}{k_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & \cdots & \frac{1}{k_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_N} & 0 & \frac{1}{k_N} & \cdots & \frac{1}{k_N} \end{pmatrix}, \quad \sum_j R_{ij} = 1, \quad (2.21)$$

en donde,  $\mathbf{M}$  la obtenemos de,

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} - \delta \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_2} & 0 & \frac{1}{k_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} & \cdots & \frac{1}{k_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{k_N} & 0 & \frac{1}{k_N} & \cdots & \frac{1}{k_N} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Al aplicar la operador delta tenemos,

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} - \delta \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

y restando las matrices, se obtiene finalmente la matriz  $\mathbf{M}$ ,

$$\mathbf{M} = \mathbf{1} - \delta R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^N M_{ij} = k_i. \quad (2.24)$$

Nóte que en la matriz  $\mathbf{M}$  el número de elementos distintos de cero de cada fila es igual nos al número de vecinos  $k_i$  del elemento  $i$ .

La dinámica local de la red viene dada por el mapa logarítmico,

$$f(x) = b + \ln|x| \quad (2.25)$$

fijando el parámetro de control  $b = -0.7$ , valor para el cual el mapa presenta comportamiento caótico, como lo muestran las figuras 1.12 y 1.12. El mapa logarítmico no presenta bandas caóticas ni ventanas de periodicidad. Estas características particulares, en la región caótica del mapa  $b \in (-1, 1)$ , contrastan con el comportamiento universal de los mapas locales comúnmente usados como el mapa logístico. Por esta razón el mapa logarítmico se ha utilizado para estudiar el fenómeno de sincronización en RMA [17, 19].

Siendo que los elementos de  $M_{ij}$  toman aleatoriamente los valores 0 o 1, donde  $M_{ij}=1$  significa que la celda  $i$  se acopla con que celda  $j$ , cuando  $M_{ij} = 1$  y  $M_{ji} = 1$  las celdas  $i$  y  $j$  se acoplan bidireccionalmente, es decir, la celda  $i$  actúa sobre la celda  $j$  y a su vez, la celda  $j$  actúa sobre la  $i$ . Cuando esto ocurre decimos que existe un enlace o acoplamiento simétrico entre los elementos  $i$  y  $j$ . En cambio, cuando se tiene que  $M_{ij} = 1$  y  $M_{ji} = 0$  la interacción es unidireccional debido a que la celda  $i$  actúa sobre la celda  $j$ , existiendo un acoplamiento en la dirección  $ij$ ; pero la celda  $j$  no actúa sobre la celda  $i$ . Decimos en este caso que el acoplamiento es asimétrico. En caso de que  $M_{ij} = M_{ji} = 0$  no existe acoplamiento en ninguna dirección.

### 2.5.2 Fracción de Enlaces Asimétricos

En este trabajo la fracción de enlaces asimétricos es uno de los parámetros que se varia para estudiar el efecto que tiene sobre la emergencia de sincronización en la red de mapas logarítmicos acoplados aleatoriamente.

Las  $k_i$  celdas vecinas de la celda  $i$  conforman el conjunto de vecinos  $\nu_i = \{c_i^1, c_i^2, c_i^3 \dots c_i^k\}$ , con  $c_i \in \{1, 2, \dots, N\}$  e  $i = 1, 2, \dots, N$ . El valor promedio de  $k_i$ ,

$$\bar{k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i,$$

se selecciona de tal forma que sea  $k \ll N$  pero suficientemente grande para garantizar la construcción de un red conexa, es decir que existe un camino entre cada par de elemntos del sistema.

Los elementos de Matriz de acoplamiento vienen dados por,

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{si } j \in \nu_i \\ 0 & , \text{si } j \notin \nu_i \end{cases}.$$

En nuestra red de conectividad aleatoria el número de celdas vecinas a la celda  $i$ ,  $k_i$ , varía de celda en celda, pero el promedio de celdas vecinas,  $k$ , es constante entonces, el número total de enlaces en la red viene dado por,

$$\bar{k}N = N_s + N_a, \quad (2.26)$$

donde,  $N_s$  y  $N_a$  son los números de enlaces simétricos y asimétricos de siste-

ma respectivamente. También podemos expresar el número total de enlaces como,

$$\bar{k}N = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} . \quad (2.27)$$

El número total de enlaces simétricos viene dado por,

$$N_s = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} M_{ji} . \quad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en (2.26) y despejando  $N_a$  se tiene,

$$N_a = \bar{k}N - N_s , \quad (2.29)$$

lo que equivale a,

$$N_a = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (M_{ij} - M_{ij} M_{ji}) . \quad (2.30)$$

La fracción de enlaces asíétricos,  $q$ , se define como,

$$q = \frac{N_a}{\bar{k}N} = \frac{1}{\bar{k}N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [M_{ij} - M_{ij} M_{ji}] \quad (2.31)$$

El algoritmo que construye la matriz  $\mathbf{M}$  está diseñado para restringir la fracción de enlaces asimétricos al valor de  $q$ . Este hecho nos permite estudiar la relevancia que pueda tener este tipo de enlaces en la emergencia de sincronización.

### 2.5.3 Parámetro de Orden: Desviación Estándar

Teniendo las medidas físicas de un gran conjunto de sistemas espacialmente extendidos que interactúan, se pueden definir cantidades macroscópicas con el fin de obtener una descripción de la dinámica del sistema. En analogía con mecánica estadística, estas cantidades macroscópicas se llaman parámetros de orden. Si el parámetro de orden fue seleccionado correctamente, los cambios que se producen en la dinámica al variar sus parámetros de control se ven reflejados en los estados asintóticos del parámetro de orden.

Las cantidades microscópicas en nuestro sistema son los valores instantáneos del estado de cada celda,  $x_t^i$ . Para estudiar su comportamiento colectivo hay que definir algún parámetro de orden macroscópico convenientemente. Para ello comencemos por definir el campo medio,

$$S_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_t^i. \quad (2.32)$$

Considerando que los estados locales  $x_t^i$  se encuentran dispersos en torno al campo medio, se puede obtener una medida del grado de su dispersión a través de la desviación estándar,

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - s_t)^2}. \quad (2.33)$$

Si la dispersión es nula, todos los valores de  $x_t^i$  coinciden con el valor de  $S_t$ , en este caso todos los estados  $x_t^i$  son iguales y decimos que el sistema

está sincronizado. Para verificar que los estados se encuentran sincronizados para todo instante de tiempo  $t$  se utiliza la expresión de desviación estandar media definida por,

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=T_t}^{T_s} \sigma_t, \quad (2.34)$$

donde,  $T_t$  es el tiempo, o número de iteraciones, que se desprecian para llegar al estado asintótico,  $T_s$  es el tiempo de simulación y  $T = T_s - T_t$  es el tiempo sobre el cual se está midiendo la desviación estándar.

Entonces, al variar los parámetros de control de nuestro sistema,  $\epsilon$  y  $q$ , la desviación estándar media  $\langle \sigma \rangle$ , permite observar cuando ocurre sincronización. De esta forma obtendremos la región en el espacio de parámetros  $(q, \epsilon)$  para la cual los estados se sincronizan.



## Capítulo 3

# Sincronización y Asimetría

Como ya se mencionó, nuestro objetivo es estudiar el efecto que tiene el grado de asimetría de la matriz de conectividad sobre la sincronización en redes de mapas logarítmicos caóticos acoplados aleatoriamente. Para ello utilizamos redes de  $N = 10^4$  mapas logarítmicos acoplados definidas como,

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)(b + \ln(x_t^i)) + \frac{\epsilon}{k_i} \sum_{j \in \nu_i} b + \ln(x_t^j), \quad (3.1)$$

fijando el parámetro de control de la dinámica local en  $b = -0.7$  y asignando las condición inicial de cada nodo aleatoriamente usando una distribución uniforme tal que  $x_0^i \in [-100, 100]$ . Los vecinos de cada mapa se escogen de forma aleatoria, teniendo en cuenta que el número de vecinos en promedio sea  $\bar{k} = 9$ . Como nos interesa estudiar cómo influye el grado de asimetría de la matriz de acoplamiento  $\mathbf{M}$ , al ser escogidos los vecinos también se tienen

en cuenta los dos tipos de enlaces: simétricos y asimétricos. Esto se hace en el algoritmo que construye la red, que mediante un conjunto de restricciones, crea enlaces simétricos y asimétricos de forma tal que se respete la fracción de enlaces asimétricos establecida mediante el parámetro  $q$ , definido en la ecuación (2.31).

Con este tipo de RMA se puede estudiar la evolución de la desviación estándar media de los estados a medida que se incrementa la intensidad de interacción  $\epsilon$  y se varía la fracción de enlaces asimétricos  $q$ . Para obtener cada uno de los puntos de la desviación estándar media se ejecutaron 6 realizaciones con redes distintas, despreciando, en cada realización, las primeras 10000 iteraciones y tomando para las estadísticas las últimas  $T = 1000$ . Para cada una de las  $T = 1000$  iteraciones se calcula la desviación estándar  $\sigma_t$  de los estados para un  $q$  y un  $\epsilon$  determinados. Luego promediando estos 1000 datos de desviación obtenemos un valor de desviación estándar media  $\langle\sigma\rangle$ , según la ecuación (2.34), luego se promedian las 6 realizaciones para obtener de esta forma, cada valor de  $\langle\sigma\rangle$  en el espacio de parámetros  $(q, \epsilon)$ .

La figura 3.1 muestra la desviación estándar promedio  $\langle\sigma\rangle$  en función de la fracción de enlaces asimétricos de la red  $q$  y de la intensidad de acoplamiento entre nodos  $\epsilon$ . Se puede apreciar que al aumentar la intensidad del acoplamiento  $\epsilon$  los valores de la desviación estándar media decrecen  $\langle\sigma\rangle$  hasta llegar a  $\langle\sigma\rangle = 0$ . El comportamiento de  $\langle\sigma\rangle$  define dos regiones en el espacio de parámetros  $(q, \epsilon)$ , en otras palabras ocurre una transición de fase entre un estado no sincronizado a uno sincronizado al aumentar la fuerza de

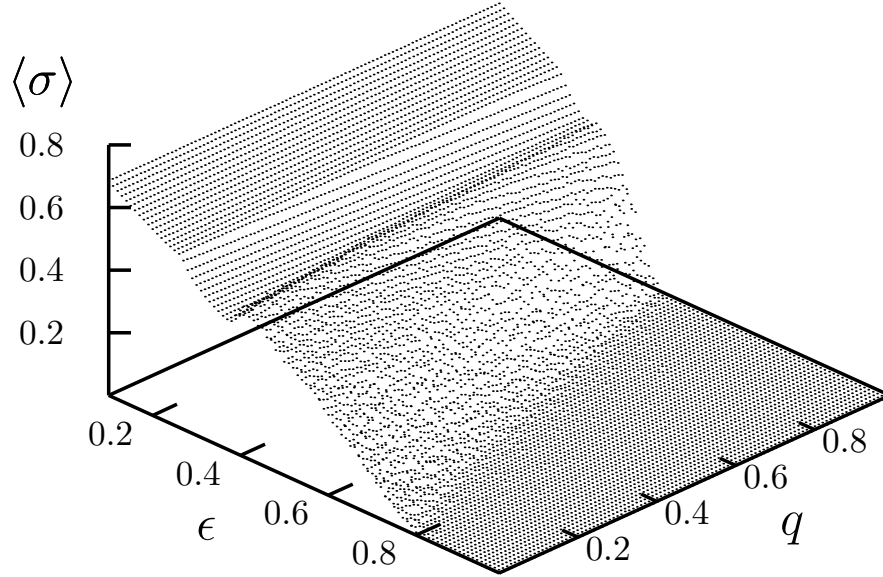


Figura 3.1: Desviación estándar promedio,  $\langle \sigma \rangle$ , en función de la fracción de enlaces asimétricos,  $q$ , y la intensidad del acoplamiento,  $\epsilon$ ; con  $N = 10^4$  celdas,  $\bar{k} = 9$  enlaces por celda y  $T = 10^3$  iteraciones de tiempo. Cada punto corresponde al promedio de 6 realizaciones.

interacción entre los nodos  $\epsilon$ .

En la figura 3.2 se puede apreciar la desviación estándar media en función del acoplamiento  $\epsilon$ , para tres valores particulares de fracción de asimetría  $q = 0.1, 0.5$  y  $0.9$ . Note que para cada valor de  $q$  existe un valor crítico de acoplamiento,  $\epsilon_c$ , para el cual ocurre la transición de fase entre el régimen no sincronizado al régimen sincronizado. La variación del parámetro de orden para valores del acoplamiento  $\epsilon < \epsilon_c$  y cercanos a éste último sigue la

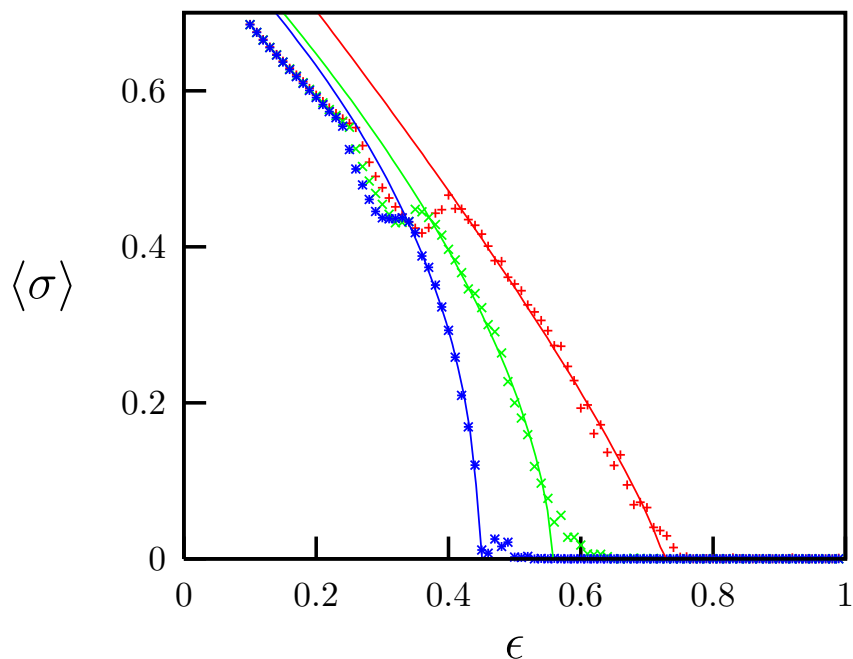


Figura 3.2: Desviación estándar promedio,  $\langle \sigma \rangle$ , en función del acoplamiento,  $\epsilon$ , para tres valores de la fracción de asimetría. Rojo  $q = 0.1$ , verde  $q = 0.5$  y azul  $q = 0.9$ . Las líneas continuas representan el ajuste de la ecuación (3.2) en un entorno cercano al valor crítico del acoplamiento  $\epsilon_c$ .

expresión,

$$\sigma \approx (\epsilon_c - \epsilon)^\beta, \quad (3.2)$$

como lo muestran las líneas continuas de la figura 3.2. La ecuación (3.2) se caracteriza mediante el exponente crítico  $\beta$  el cual se obtiene del ajuste de la ecuación (3.2) a los datos.

La figura 3.3 muestra como varía el exponente crítico  $\beta$  en función de la

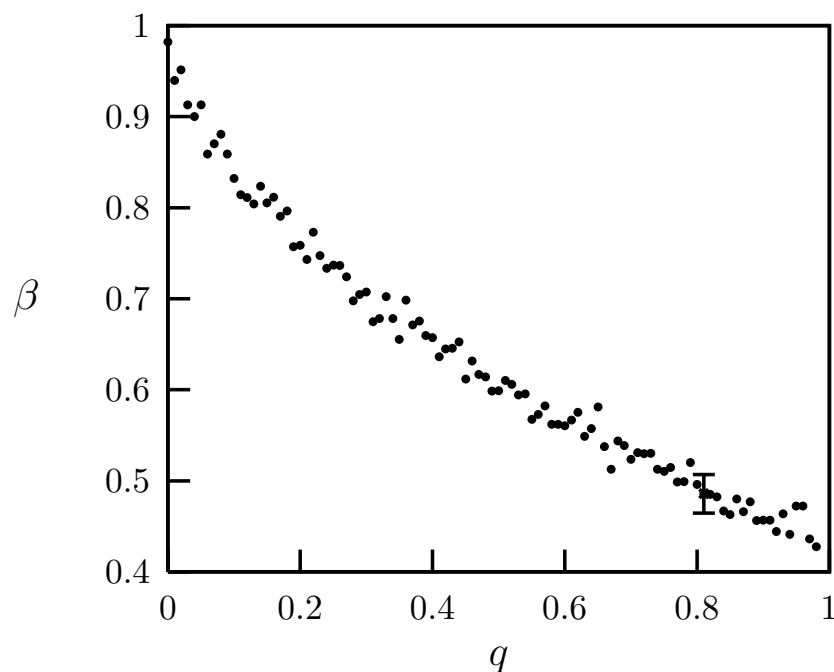


Figura 3.3: Exponente crítico,  $\beta$ , en función de la fracción de enlaces asimétricos,  $q$ . Los valores de  $\beta$  se calcularon ajustando la ecuación 3.2 a los datos. La figura también muestra una barra de error típica.

fracción de acoplamiento asimétricos  $q$ . Note que mientras la fracción de acoplamiento asimétrico  $q$  se incrementa, el exponente crítico  $\beta$  se hace cada vez más pequeño, lo que significa que el cambio de fase desde el régimen no sincronizado al sincronizado, al aumentar  $q$ , es cada vez más abrupto.

También, de la figura 3.3 se puede ver que la transición de fase en redes aleatoria de  $N = 10^4$  elementos y con un número de vecinos promedio  $\bar{k} = 9$ , es una transición de segundo orden para cualquier valor de  $q$ , es decir, que el exponente crítico siempre cumple con  $0 < \beta < 1$ .

Los valores críticos del acoplamiento,  $\epsilon_c$ , en los que ocurre la transición de fase, se obtienen del mismo ajuste de los datos de la figura 3.1 con la ecuación (3.2). De esta forma encontramos la frontera de sincronización y obtenemos el diagrama de fase en el espacio de parámetros  $(q, \epsilon)$ , mostrado en la figura 3.4. En esta figura observamos las dos zonas en el espacio de pa-

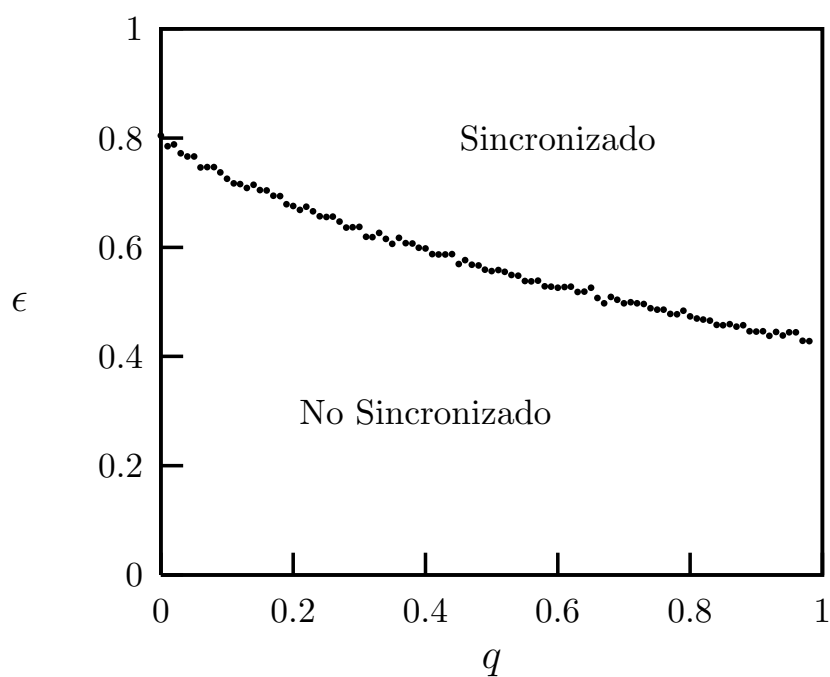


Figura 3.4: Diagrama de fase en el espacio de parámetros  $(q, \epsilon)$ . Los puntos representan el valor de  $\epsilon_c$  para cada  $q$ . Estos puntos definen la frontera que divide el espacio de parámetros en dos zonas, una que representa la fase sincronizada en la parte superior y otra que representa la fase no sincronizada en la parte inferior.

rámetros, una sincronizada y una no sincronizada, separadas por la frontera obtenida con los valores del acoplamiento crítico,  $\epsilon_c$ .

Es notable el hecho de que el surgimiento de sincronización tiene una gran dependencia con respecto al parámetro  $\epsilon$ . Podemos apreciar que para  $\epsilon \in [0.01, 0.41]$  no emerge sincronización, sin importar la fracción de acoplamientos asimétricos  $q$ .

Luego, para el intervalo  $\epsilon \in [0.42, 0.80]$  los elementos se comienzan a sincronizar para distintos valores de  $q$ . Sabemos que en ese intervalo las interacciones entre los elementos se comportan de la manera siguiente: A medida que se incrementa  $\epsilon$ , partiendo de  $\epsilon = 0.42$ , la acción de cada elemento sobre sí mismo ( $1 - \epsilon$ ), se aproxima a la fuerza que ejercen sus vecinos sobre él  $\epsilon$ , hasta que en  $\epsilon = 0.5$  se igualan. Si seguimos incrementando  $\epsilon$  hasta  $\epsilon = 0.80$ , sucede que la influencia de los vecinos se va haciendo mayor que la del mismo elemento. Para este intervalo, en la gráfica, se observa que se requiere cada vez de menos enlaces asimétricos para que ocurra sincronización. Es decir, que cuando la interacción de los vecinos es mayor que la del elemento se requiere de menor asimetría para que ocurra sincronización. La figura 3.4, nos permite obtener la fracción de enlaces asimétricos  $q$  necesaria para que emerja la sincronización dado un valor de la fuerza de interacción  $\epsilon$ , siempre que esta última esté contenida en el intervalo  $\epsilon \in [0.42, 0.80]$ .

Finalmente, en el intervalo  $\epsilon \in [0.80, 1]$  la fuerza de interacción de los vecinos sobre cada elemento es considerablemente mayor con respecto a la influencia de los elementos con ellos mismos. En este intervalo el surgimiento de sincronización es independiente de la fracción de enlaces asimétricos  $q$  de la matriz  $\mathbf{M}$ .

# Conclusiones

Para este tipo de redes aleatorias con un  $\bar{k} \ll N$  y una dinámica local caótica dada por el mapa logarítmico, encontramos lo siguiente:

La fracción de interacciones asimétricas en la red  $q$ , sólo influye en la emergencia de sincronización en el intervalo de  $\epsilon \in [0.42, 0.80]$ . En este intervalo el incremento de acoplamientos asimétricos favorece la emergencia de sincronización, ya que mientras más grande es la fracción de enlaces asimétricos mayor es el rango de fuerza de interacción  $\epsilon$  para el que puede emerger la sincronización.

A pesar de que no es indispensable que existan en la red enlaces simétricos para que emerja sincronización, cuando todos los acoplamientos en la red son simétricos  $q = 0$ , se requiere más fuerza de interacción que cuando existe cierto grado de asimetría para que ésta emerja.

Por otro lado, la disminución del valor del exponente crítico  $\beta$  al incrementar la fracción de acoplamientos asimétricos  $q$  revela que la red presenta un cambio de fase cada vez más abrupto entre las fases no sincronizada y sincronizada.



Este estudio utiliza una generalización de las redes aleatorias que da a conocer la importancia de tomar en cuenta la proporción entre acoplamientos simétricos y asimétricos a la hora de estudiar la emergencia de sincronización en sistemas que presentan este y tal vez otros tipos de comportamiento.

# Bibliografía

- [1] S.C. Manrubia y A.S. Mikhailov. *Mutual synchronization and clustering in randomly coupled coupled chaotic dynamical networks*. Phys. Rev. E., **60**, 1579 (1999).
- [2] A.E. Motter, C. Zhou y J. Kurths. *Universality in the synchronization of weighted random networks*. Phys. Rev. Lett. **96**, 034101 (2006).
- [3] O. Alvarez-Llamoza, K. Tucci, M.G. Cosenza y M. Pineda. *Random global coupling induces synchronization and nontrivial collective behavior in networks of chaotic maps*. Eur. Phys. J Spetial Topics. **143**, 245 (2007).
- [4] H.G. Shuster. *Deterministic Chaos: an Introduction*. VCH, Weinheim, New York, tercera edición, (1995).
- [5] K. Kaneko. *Theory and applications of coupled map lattices*. Wiley, New York, primera edición, (1993).

- [6] R.V. Sole y S.C. Manrubia. *Orden y Caos en sistemas complejos*. Edicions UPC, Barcelona, primera edición, (1996).
- [7] M.J. Feigenbaum. *The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations*, J. Stat. Phys., **21**, 669 (1979).
- [8] T. Kawabe y Y. Kondo. *Fractal transformation of the One dimensional chaos produced by logarithmic map*, Prog. Theor. Phys., **85**, 759 (1991).
- [9] K. Kaneko. *Supercritical Behavior of Disordered Orbit of a Circle Map*. Prog. Theory. Phys., **72**, 1089 (1984).
- [10] I.Waller y R. Kapral. *Spatial and temporal structure in systems of coupled nonlinear oscillators*. Phys .Rev.A, **30**, 2047 (1984).
- [11] M. Cosenza y R. Kapral. *Coupled maps and pattern formation on the Sierpinski gasket* Chaos, **2**, 329 (1992).
- [12] M. Cosenza y R. Kapral. *Coupled maps on fractal lattices*. M.G. Cosenza y R. Kapral, Phys. Rev. A, **46**, 1850 (1992).
- [13] M. Cosenza y K.Tucci. *Transition to turbulence in coupled maps on hierarchical lattices*. Chaos solitones and fractales. **11**, 2039 (2000).
- [14] P. Gade. *Synchronization of oscillators with random nonlocal connectivity*. Phys Rev. E. **54**, 64 (1996).

- [15] S. Sequeira. *Turbulencia en redes de mapas con conectividad aleatoria no local*. Tesis de Licenciatura, de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela (1998).
- [16] O. Alvarez-Llamoza. *Estudio de la dinámica local y del surgimiento de organización temporal colectiva en sistemas de mapas singulares caóticos*. Tesis de Licenciatura, de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela (1997).
- [17] J.Gonzales. *Comportamiento Colectivo de mapas Logarítmicos Acoplados Globalmente*. Tesis de Licenciatura, de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela (1997).
- [18] M. Pineda. *Patrones espaciotemporales en sistemas caóticos con interacciones locales y globales*. Tesis de Licenciatura, de la Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela (2001).
- [19] M.G. Consenza. *Collective Behavior of Coupled Chaotics maps*. Phys. Lett. A., **204**, 128 (1995).
- [20] S. Barnet. *Matrices methods and applications*. Oxford University Press, Oxford, primera edición (1990)
- [21] A.T. Winfree. *Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators*. J. Theoret. Biol., **16**, 15 (1967).
- [22] A.T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer-Verlag, New York, primera edición, (1980).

- [23] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer-Verlag, New York, primera edición (1984).
- [24] Y. Kuramoto. En *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Editor H. Araki, 39, (1975). Springer-Verlag.
- [25] R.E. Mirollo y S.H. Strogatz. *Synchronization of pulse-coupled biological oscillators*. SIAM J. Appl. Math., **50**, 1645 (1990).
- [26] L.M. Pecora y T.L. Carroll. *Synchronization in chaotic systems*. Phys. Rev. Lett., **64**, 821 (1990).
- [27] K. Kaneko. *Oscillation and doubling of torus*. Prog. Theor. Phys., **72**, 202 (1984).
- [28] M.C. Cross y P.H. Hohenberg. *Pattern formation outside of equilibrium*. Rev. Mod. Phys., **65**, 851 (1993).