



*FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA*

EMERGENCIA DE REDES DE PEQUEÑO MUNDO EN SISTEMAS COEVOLUTIVOS DE MAPAS CAÓTICOS

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
LICENCIADO EN FÍSICA

Presentado por: Br. Alejandra Méndez

Tutor: Prof. Mario Cosenza

*Thought and theory must precede all salutary action.
Yet action is nobler in itself than either thought or theory.
Virginia Woolf*

Índice general

Índice general	IV
Agradecimientos	v
Resumen	VI
1. Introducción	1
2. Redes de Pequeño Mundo	3
2.1. De las redes regulares y aleatorias.	3
2.1.1. Coeficiente de Agrupamiento.	5
2.1.2. Longitud Característica.	5
2.2. Modelo de Watts y Strogatz.	6
2.2.1. Ejemplos.	7
3. Sincronización en Redes Dinámicas	9
3.1. Mapas Iterativos.	9
3.1.1. Mapa Logístico.	10
3.1.2. Mapa Logarítmico.	13
3.1.3. ¿Por qué utilizar mapas iterativos?.	14
3.2. Redes de mapas acoplados.	15
3.2.1. Acoplamiento Global, Local y No Local.	17
3.3. Sincronización en R.M.A.	18
3.3.1. Sincronización caótica y acoplamiento local.	18
3.3.2. Sincronización y el Modelo de Watts y Strogatz.	20
4. Emergencia de pequeño mundo en sistemas coevolutivos de mapas caóticos	23
4.1. Modelo coevolutivo de mapas acoplados.	23
4.1.1. Algoritmo de reconexión.	24
4.2. Resultados del modelo.	25
4.2.1. Para una red inicial aleatoria.	25
4.2.2. Para un red inicial regular.	28

5. Conclusiones	37
Bibliografía	39

*When I say “I”, I mean “We”, and
when I say “We”, I mean “Them”.*

David Feldman

Agradecimientos

Principalmente quiero agradecer a mis maravillosos abuelos por darme toda su ayuda y apoyarme en mis caprichos desde que nací, por instarme a observar la naturaleza y por su tolerancia y comprensión ante mis errores. A la familia Rincón Nigro por su apoyo incondicional durante los últimos 4 años.

A mi tutor, el Prof. Mario Cosenza, por sus enseñanzas y por su apoyo a lo largo de todo el proyecto, gracias a sus consejos y a las discusiones que me han ayudado a mejorar, no sólo académicamente sino también como persona. Gracias al Prof. Kay Tucci por su ayuda con las herramientas computacionales y sus acertados argumentos acerca del proyecto, los cuales me ayudaron a entender y a corregir algunos conceptos. Al Prof. Orlando Llamaza y al Prof. Carlos Echeverría por levantarme el ánimo con su buen humor, y a todos mis compañeros del grupo de Caos y Sistemas Complejos. A mis amigos, algunos por apoyarme con un Ice Morango y otros por distanciarse en silencio.

Al Instituto ISC PIF de Île de France por un mes inolvidable en París.

También quiero agradecer a Zulay por tomarse la molestia de cada semana. Y por último, pero no menos importantes, gracias a mis padres y hermanos porque de alguna u otra forma siempre están.

Resumen

Se investiga un mecanismo que induce la emergencia de estructuras con propiedades de pequeño mundo en un modelo de mapas caóticos acoplados. Se extiende el estudio del modelo coevolutivo propuesto por P. Gong y C. Van Leeuwen, [*Europhys. Lett.* **67**, 328 (2004)] en el cual la estructura de la red de conectividad entre elementos dinámicos cambia de acuerdo a los estados de éstos. En este modelo la reconexión entre los mapas es estimulada por la búsqueda de sincronización. Se muestra que este mecanismo simple es suficiente para formar eventualmente redes con propiedades de pequeño mundo. Las propiedades estadísticas de las redes se caracterizan mediante cantidades como el coeficiente de agrupamiento, la longitud característica, la distribución del número de vecinos y la distribución del número de grupos. Se encuentra que la emergencia de una red de pequeño mundo ocurre para valores suficientemente grandes del parámetro de acoplamiento entre los elementos. Se muestra que la dinámica local no es relevante para que surja este tipo de red. Por último, se demuestra que el surgimiento de una red de pequeño mundo en este modelo es un fenómeno robusto, es decir, que no depende de la configuración inicial de la red de conectividad.

*Action is no less necessary than
thought to the instinctive tendencies of
the human frame.*

Mohandas Gandhi

Capítulo 1

Introducción

La investigación de redes dinámicas coevolutivas ha atraído recientemente considerable atención. Aplicaciones notables de estos estudios se han realizado en teoría de juegos espaciales [1][2, ?, 3], en sistemas de diversidad cultural [4][5] y sistemas dinámicos [6]. Por sistemas coevolutivos se entiende, sistemas en los cuales la dinámica de los elementos constituyentes varía en el tiempo, a la vez que produce cambios en la estructura de conexión entre estos elementos, haciendo que la topología del sistema también cambie en el tiempo.

En los últimos años, los conceptos **evolución**, **coevolución** y **adaptación** han ingresado a la terminología de los físicos dedicados al estudio de sistemas complejos. Desde el punto de vista de la Biología, la **evolución** es el cambio de las características hereditarias de una población. Sin embargo, también es considerada un proceso universal (dinámica) que da paso a lo no universal (diversidad) manifiesto en la fenomenología de la vida [7]. La **coevolución** se define como la mutua evolución e influencia entre dos especies. Cada parte en un relación que coevoluciona ejerce una presión selectiva sobre la otra, afectando así la evolución de ambas. Un ejemplo de coevolución lo constituyen las especies huéspedes y sus parásitos. La **adaptación** se refiere a estructuras o comportamientos que mejoran una función específica; la adaptación ocurre a través de una modificación gradual de estructuras existentes [8, 9, 10].

En general, los físicos de la complejidad no tratan sistemas propiamente evolutivos (Teoría de Darwin). En lugar de esto se preguntan, ¿qué significa que un sistema de elementos dinámicos cerrado **evolucione**, **coevolucione** y/o se **adapte**?. Como sabemos, en sistemas dinámicos la evolución se define como el cambio de los estados de un sistema en el tiempo, partiendo de un estado inicial arbitrario. Ejemplos de sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales, mapas iterativos, automatas celulares,

entre otros. Partiendo de la analogía biológica, podemos definir un sistema dinámico coevolutivo como un sistema de elementos donde la evolución de cada elemento depende de su propia dinámica y de la interacción con otros elementos. Un ejemplo de coevolución es un sistema de mapas acoplados. La adaptación puede ser definida como el conjunto de cambios en la estructura de conectividad entre los elementos debido a la coevolución de los mismos.

Modelos dinámicos coevolutivos y/o adaptativos han permitido una mejor representación de diversos sistemas en la Naturaleza.

La presente tesis se enfoca en el estudio de un sistema de mapas acoplados en el cual, tanto los estados descritos por los mapas, como las conexiones entre ellos se influyen mutuamente y pueden cambiar en el tiempo. Específicamente, consideraremos una red de mapas caóticos con acoplamiento no local, la cual es capaz de sincronizarse para ciertos valores de parámetros del sistema. El grado de sincronización entre los elementos se denomina *coherencia*, y ésta determina la conexión entre los mapas, de manera que la topología de la red cambie en el tiempo. En particular, se encuentra que, partiendo tanto de una red de conectividad aleatoria o de una red regular, el sistema alcanza asintóticamente una estructura de conectividad de tipo de red de *pequeño mundo*. Este cambio en la estructura de la red puede interpretarse como un proceso de adaptación debido a la interacción entre la dinámica de los mapas y la conexión entre ellos.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el **Capítulo 2** se presenta una breve revisión de las redes de *pequeño mundo*, introducidas inicialmente por Stanley Milgram en 1962 [11], y modeladas por Watts y Strogatz [12] en 1998. El **Capítulo 3** contiene los conceptos de mapas iterativos, sistemas dinámicos, redes de mapas acoplados y sincronización de sistemas caóticos. En el **Capítulo 4** se describe el modelo investigado en esta tesis y se muestran los resultados obtenidos. Finalmente, en el **Capítulo 5** se discuten los resultados y se elaboran las conclusiones de este trabajo.

*A black cat crossing your path
signifies that the animal is going
somewhere.*

Groucho Marx

Capítulo 2

Redes de Pequeño Mundo

2.1. De las redes regulares y aleatorias.

Este capítulo es un breve resumen del concepto de redes de pequeño mundo (small world) [13].

Comencemos por la noción de red. Una red se define matemáticamente como un grafo G que es un par ordenado de conjuntos disjuntos (V, E) , donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices, nodos, o puntos, y un conjunto E de pares ordenados de distintos elementos de V , llamados aristas, arcos o conexiones. Los grafos pueden ser dirigidos o no dirigidos; los puentes de una ciudad son un ejemplo de un grafo no dirigido, mientras las redes de transmisión eléctricas son un ejemplo de un grafo dirigido [14].

El conjunto regular y periódico de vértices o nodos en el espacio es llamado red regular. Este tipo de topologías han sido objeto de innumerables modelos físicos, tales como el modelo de Ising o percolación.

Una red aleatoria es un grafo donde las aristas se encuentran aleatoriamente distribuidas. Erdős y sus colaboradores estudiaron las propiedades de estos grafos (para un resumen ver [15]). La mayoría de los casos de estudios se concentraron en aquellos donde el número de vértices se mantenía constante, mientras que el número de aristas entre vértices era incrementado. En Física, las redes aleatorias han sido empleadas en problemas de dinámica, modelos de spin y termodinámica, entre otros. También son usadas ampliamente en Economía, por ejemplo, para modelar la interacción entre agentes sociales o económicos.

En 1969 Stanley Milgram [11] se planteó el problema de pequeño mundo en un

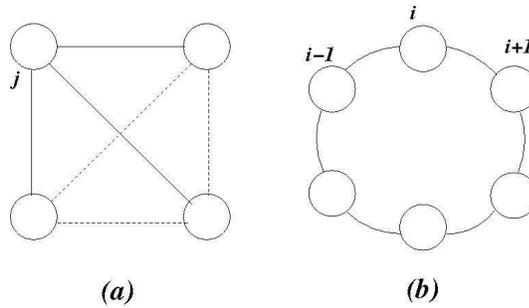


Figura 2.1: Redes regulares. (a) Red bidimensional; el nodo j tiene 3 tres vecinos (líneas sólidas) y éstos a su vez son vecinos entre si (líneas segmentadas) (b) Anillo unidimensional; el nodo i tiene 2 vecinos y éstos no están conectados entre si.

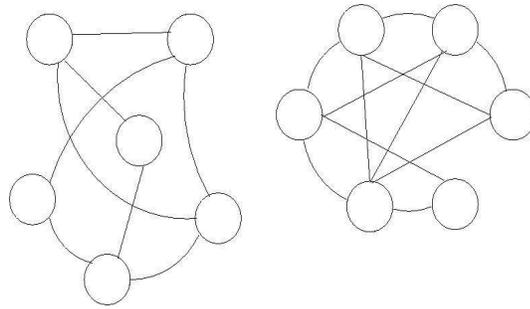


Figura 2.2: Ejemplos de redes aleatorias

sistema social mediante la formulación de la siguiente pregunta, “¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cualesquiera, elegidas arbitrariamente en una población grande, tal como la de Estados Unidos, se conozcan?”. Dos años antes, Milgram había realizado un experimento que consistió en elegir al azar a un grupo de personas en Nebraska, y les entregó un documento y les pidió que lo hicieran llegar a un corredor de bolsa en Boston a través de personas conocidas. Milgram encontró que el número promedio de intermediarios entre las personas elegidas y el corredor de bolsa, era alrededor de 6. A partir de aquí, Milgram desarrolló el concepto de red de pequeño mundo: una red en la cual la longitud entre dos individuos forme cadenas de conocidos cuyo tamaño es mucho menor comparado con el número de personas.

El primer modelo matemático de redes de pequeño mundo fue introducido por Watts y Strogatz [12] en 1998, como una forma simple de describir una variedad de redes naturales y artificiales. Sabiendo que una red regular no modela el comportamiento social, y que las redes aleatoria no coinciden muy bien con las propiedades de los sistemas sociales, ellos propusieron un modelo que contiene una propiedad local de los grafos regulares (**vecindad**) y una propiedad global de los grafos aleatorios (**distancia**). A continuación describimos estas características.

2.1.1. Coeficiente de Agrupamiento.

El coeficiente de agrupamiento o clustering es una medida de **vecindad** entre vértices. Considere la figura 2.3, en la cual se muestra un nodo i que tiene 6 vecinos, entonces estos elementos pueden formar $\frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 15$ pares de vecinos. De estos pares, 5 están conectados entre sí. El coeficiente de agrupamiento local C_i del vértice i está definido por la fracción de pares conectados, i.e., $C_i = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Entonces el coeficiente de agrupamiento en un grafo de n nodos es el promedio de todos los coeficientes de agrupamiento locales:

$$CC = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{N_o \text{ vecinos}}{\frac{1}{2}k_i(k_i - 1)} \quad (2.1)$$

Donde $N_o \text{ vecinos}$ es el número de pares de vecinos conectados, y k_i es el número de vecinos del nodo i . Para una red aleatoria $CC = 1$; a medida que el tamaño de la red aumenta todos los vecinos de un nodo cualquiera son vecinos entre ellos. Mientras que para una red regular como la que se muestra en la figura 2.1 (b), $CC = 0$.

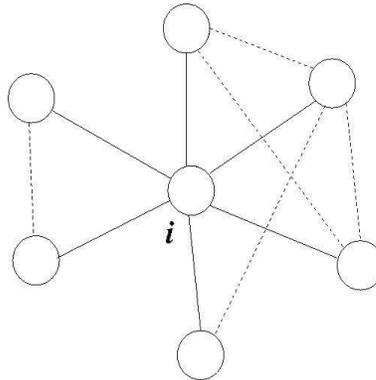


Figura 2.3: El nodo central i tiene 6 vecinos (líneas sólidas). Cinco de quince posibles pares de estos vecinos están conectados entre ellos (líneas segmentadas). El coeficiente de clustering resultante es $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

2.1.2. Longitud Característica.

De los grafos aleatorios surge el concepto de **distancia** la cual es definida como el mínimo número de pasos entre dos vértices dados. Para las redes regulares se ha encontrado que la distancia promedio entre dos vértices cualesquiera es [13]:

$$L_c \sim \frac{N}{2k}, \quad (2.2)$$

donde N es el número de vértices, k es el número de aristas o conexiones por vértice. Por otro lado, para una red aleatoria l varía como:

$$L_c \sim \ln(N)/\ln(k). \quad (2.3)$$

La condición $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$, donde $k \gg \ln(N)$, garantiza que un grafo aleatorio no se convierta en un grafo desconexo [13].

La longitud característica, no es más que la **distancia** promedio anteriormente definida. En años recientes se ha descubierto que el efecto “pequeño mundo” surge específicamente cuando la media (algunas veces el máximo) de la distancia nodo-nodo es la menor distancia, y es la pequeña comparada con el número total de nodos de la red; adicionalmente, ésta aumenta lentamente con el tamaño de la red.

2.2. Modelo de Watts y Strogatz.

El trabajo de Watts y Strogatz [12] muestra por primera vez que las propiedades de las redes naturales se encuentran entre las redes regulares y las redes aleatorias. El modelo consiste en una red regular unidimensional (ver figura 2.4) en la cual las conexiones entre nodos de la red son generados por un “recableado” de aristas en función de una probabilidad p , manteniendo constante el número total de aristas en el grafo y el número de vecinos k .

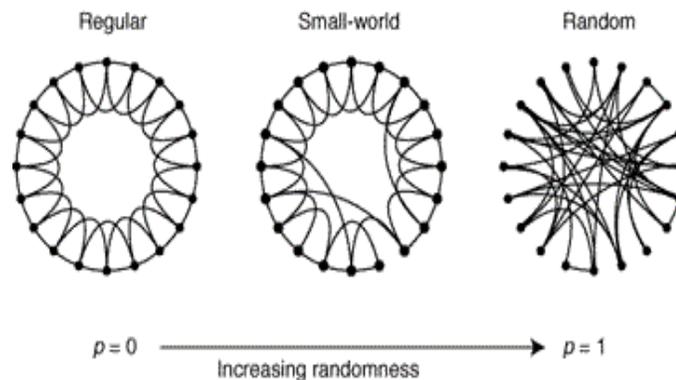


Figura 2.4: Se elige un nodo y la arista que lo conecta a su vecino más cercano en el sentido de las agujas del reloj. Con probabilidad p , la arista es reconectada a un nodo elegido al azar sobre el anillo. Se repite el proceso anterior sobre cada nodo del anillo en el sentido de las agujas del reloj hasta que se concluya una vuelta. Luego se repite, pero esta vez la conexión se realiza sobre los segundos vecinos de cada nodo y así sucesivamente. (como hay $\frac{nk}{2}$ nodos en el grafo, el proceso del recableado se detiene después de $\frac{k}{2}$ vueltas).

Watts y Strogatz calcularon la distancia promedio entre dos nodos en un grafo (propiedad global) Lc y el coeficiente de agrupamiento (propiedad local) CC en función de la probabilidad p . Los resultados se muestran en la figura 2.5. Se observa que existe un rango de valores de la probabilidad de recableado p para el cual el coeficiente de agrupamiento $CC(p)$ es alto y la longitud característica $Lc(p)$ es baja.

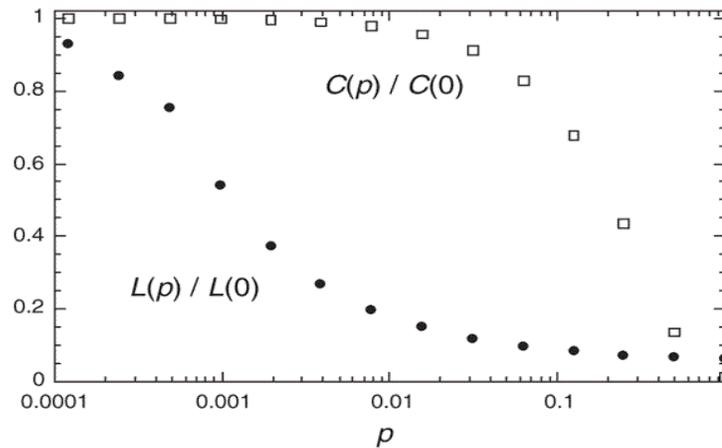


Figura 2.5: Longitud característica $Lc(p)$ y coeficiente de agrupamiento $CC(p)$ para una familia de grafos recableados aleatoriamente (ver figura 2.4) [12].

2.2.1. Ejemplos.

El modelo de Watts y Strogatz sugiere que el fenómeno de pequeño mundo puede ser descrito con una red poco densa, con conexiones de largo alcance entre los nodos. Para probar esta idea, ellos calcularon Lc y CC para los siguientes casos:

- i) **Red de Colaboradores de actores en películas:** aquí, dos actores se consideran conectados si ellos han trabajado juntos en una película. Esta red fue construida usando la fuente de datos de actores de Hollywood.
- ii) **Red Eléctrica del Oeste de Los Estados Unidos:** la red que lleva electricidad a la parte oeste de norte América. En esta red los nodos son estaciones y subestaciones generadoras de electricidad y las aristas son las líneas de transmisión.
- iii) **Red Neuronal del gusano *C. Elegans*:** este pequeño nematodo es uno de los organismos mejor estudiados por las ciencias biológicas. Su cerebro consta de 282 neuronas y su red neuronal (patrón de conexiones sinápticas entre neuronas)

había sido completamente determinada en una serie de experimentos realizados John White y sus colaboradores en 1980.

Tabla 2.2.1: Longitud característica y coeficiente de agrupamiento para varias redes naturales. En cada red se indica el número de nodos n , grado medio $\langle k \rangle$, la longitud característica L_c y el coeficiente de agrupamiento CC . Para una comparación se coloca la longitud característica $L_{c_{aleatorio}}$ y el coeficiente de agrupamiento $CC_{aleatorio}$ de un grafo aleatorio del mismo tamaño y grado medio.

Red	n	$\langle k \rangle$	L_c	$L_{c_{aleatorio}}$	CC	$CC_{aleatorio}$	Ref.
WWW, site lev., undir.	153127	35,21	3,1	3,35	0,1078	0,00023	[16]
Internet, domi. lev.	3015 – 6209	3,52 – 4,11	3,7 – 3,76	6,36 – 6,18	0,18 – 0,3	0,001	[17]
Actores en películas	225226	61	3,65	2,99	0,79	0,00027	[12]
LANL co-autores	52909	9,7	5,9	4,79	0,43	$1,8 \times 10^{-4}$	[18]
MEDLINE co-autores	1520251	18,1	4,6	4,91	0,066	$1,1 \times 10^{-5}$	[18]
SPIRES co-autores	56627	173	4,0	2,12	0,726	0,003	[18]
NCSTRL co-autores	11994	3,59	9,7	7,34	0,496	3×10^{-4}	[18]
Co-autores de Mat.	70975	3,9	9,5	8,2	0,59	$5,4 \times 10^{-5}$	[19]
Co-autores Neuroci.	209293	11,5	6	5,01	0,76	$5,5 \times 10^{-5}$	[19]
<i>E. coli</i> graf. substr.	282	7,35	2,9	3,04	0,32	0,026	[20]
<i>E. coli</i> graf. reac.	315	28,3	2,62	1,98	0,59	0,09	[20]
Ythan estuary food web	134	8,7	2,43	2,26	0,22	0,06	[21]
Silwood Park food web	154	4,75	3,40	3,23	0,15	0,03	[21]
Palabras, co-ocurrencia	460902	70,13	2,67	3,03	0,437	0,0001	[22]
Palabras, sinónimos	22311	13,48	4,5	3,84	0,7	0,0006	[23]
Red Electrica	4941	2,67	18,7	12,4	0,08	0,005	[12]
<i>C. Elegans</i>	282	14	2,65	2,25	0,28	0,05	[12]

Muchas redes naturales y artificiales han sido estudiadas por la comunidad científica, además de las mostradas en la tabla 2.2.1: descomposición de factores primos [24]; red de contacto sexual [25]; número de Erdős o red de colaboraciones científicas [26]; número de Ruth [27], entre otros.

*Ideas not coupled with action never
become bigger than the brain cells
they occupied.*

Arnol H. Glasgow

Capítulo 3

Sincronización en Redes Dinámicas

3.1. Mapas Iterativos.

Los mapas iterativos constituyen un paradigma para el estudio de sistemas caóticos que han permitido el extraordinario avance de este tema durante los últimos 30 años [7][14][28]. Los mapas iterativos son funciones de tiempo discreto las cuales son fáciles de simular en computadoras.

Un mapa iterativo unidimensional es una función f sobre el espacio de fase que determina el siguiente estado del sistema dado el estado actual x_n , en un tiempo discreto,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (3.1)$$

donde x_{n+1} describe el estado del sistema en el tiempo $n + 1$ (tiempo posterior).

Iterar un mapa significa aplicar repetidamente el mapa utilizando los resultados previos para la siguiente iteración,

$$x_n = f(x_{n-1}) = f(f(x_{n-2})) = f^{(n)}(x_0). \quad (3.2)$$

Por ejemplo, suponga que repetidamente oprime el botón de la calculadora de la función \cos , comenzando con algún número x_0 . Entonces consecutivamente obtendrá una salida $x_1 = \cos x_0$, $x_2 = \cos x_1$, etc. Esta aplicación $x_{n+1} = \cos x_n$ es un mapa unidimensional, así llamado porque los puntos x_n pertenecen a un espacio unidimensional de números reales; y la secuencia $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, es llamada la **órbita** que comienza en x_0 [28].

3.1.1. Mapa Logístico.

Este mapa es una discretización en el tiempo de la ecuación diferencial logística para el crecimiento de la población y fue investigado por Robert May (1976). Dicho mapa exhibe una no linealidad de tipo cuadrático [14][28],

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (3.3)$$

donde r es un parámetro. Este mapa pertenece a la familia de mapas cuadráticos unimodales (que poseen un máximo o un mínimo) que se pueden expresar en la forma general:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2, \quad (3.4)$$

donde $x \in [-1, 1]$ y $a \in [0, 2]$. El mapa 3.3 y el mapa general 3.4 están relacionados por la transformación

$$y = \left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}, \quad (3.5)$$

$$a = \frac{r^2}{4} - \frac{r}{2}. \quad (3.6)$$

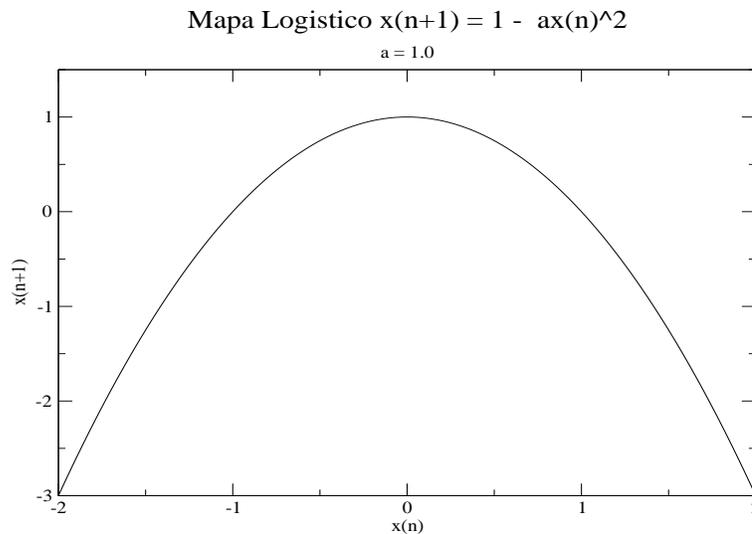


Figura 3.1: Aquí el parámetro $a = 1,0$. El mapa es una curva concava, y debido a esto se dice que pertenece a la familia de mapas *unimodales*.

Diagrama de Bifurcación.

Existe una secuencia infinita de valores del parámetro a_k para los cuales x_n cae en períodos 2^k , como se muestra en la figura 3.2. Este tipo de figura se llama diagrama

de bifurcación. Note que para $a < 0,75$ se tiene un único estado estacionario. Para $a = 0,75$, el estado del mapa comienza a oscilar entre dos estados que se repiten cada dos iteraciones y es llamado **ciclo de períodos dobles**. Para un a aun más grande, $a \approx 1,25$, x_n se aproxima a un ciclo que se repite cada cuatro iteraciones; y es llamado **período-4**. Una cascada de períodos dobles ocurren a medida que a aumenta, cayendo en **período-8**, **período-16**, y así, hasta que se tienen infinitos periodos para valores del parámetro $a = a_\infty \approx 1,401155$, aquí el mapa se vuelve caótico [14].

Digrama de Bifurcacion del Mapa Logistico

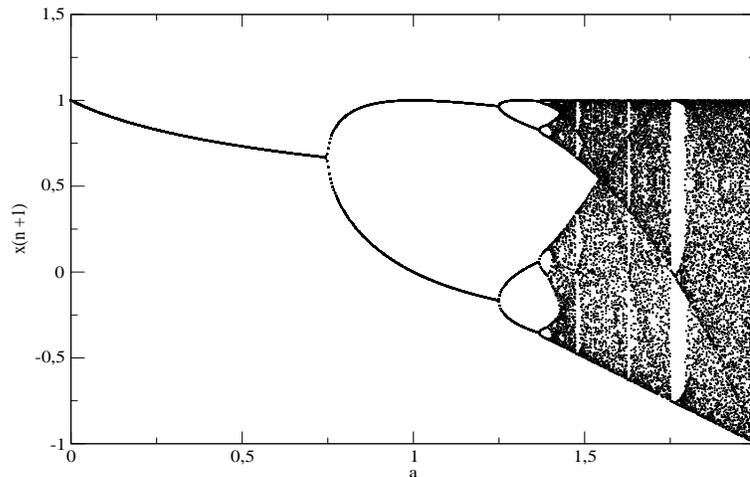


Figura 3.2: Diagrama de bifurcación para el mapa logístico utilizado. La región caótica comienza en $a \approx 1,401155$. Para $a > a_\infty$ el diagrama de orbitas muestra una inesperada mezcla de orden y caos, con **ventanas periódicas** intercaladas entre nubes de puntos caóticos. Existe una larga ventana que comienza cerca de $a \approx 1,75$ la cual contiene una órbita de **período-3** estable.

Debido a esto, la transición al caos en este mapa se dice que es por **duplicación de períodos**. Una gran variedad de sistemas dinámicos siguen esta ruta al caos, pero no es la única ruta hacia el caos y tampoco es la única que presenta este mapa. Otra ruta al caos es por intermitencia, la cual fue encontrada por Pomeau y Manneville en 1980 [14][28].

Para $a \approx 1,75$ existe una órbita estable de **período-3**. Esto es, el mapa cae en un punto de bifurcación inversa, y para a ligeramente menores que $a \approx 1,75$, se observan puntos intermitentes intermitentes. Esta transición intermitente es llamada de *tipo I*.

Existen otro tipo de rutas al caos, por intermitencia *tipo II* y *tipo III*, *quasi-periodicidad*, *crisis* [7][14][28] entre otros.

Exponente de Lyapunov.

Como es muy bien conocido, una de las características para que un sistema sea caótico, es mostrar *sensitividad a las condiciones iniciales* [7]. En este sentido, las orbitas vecinas se separan exponencialmente rápido en promedio. La dependencia sensitiva es cuantificada por el exponente de Lyapunov.

Dada una condición inicial x_0 , considere un punto cercano $x_0 + \delta x_0$, donde la separación inicial δx_0 es pequeña. Sea δx_n la separación después de n iteraciones. Si $|\delta x_n| \approx |\delta x_0|e^{n\lambda}$, entonces λ es llamado exponente de Lyapunov. Cuando dicho exponente es positivo, el sistema es caótico [7][14].

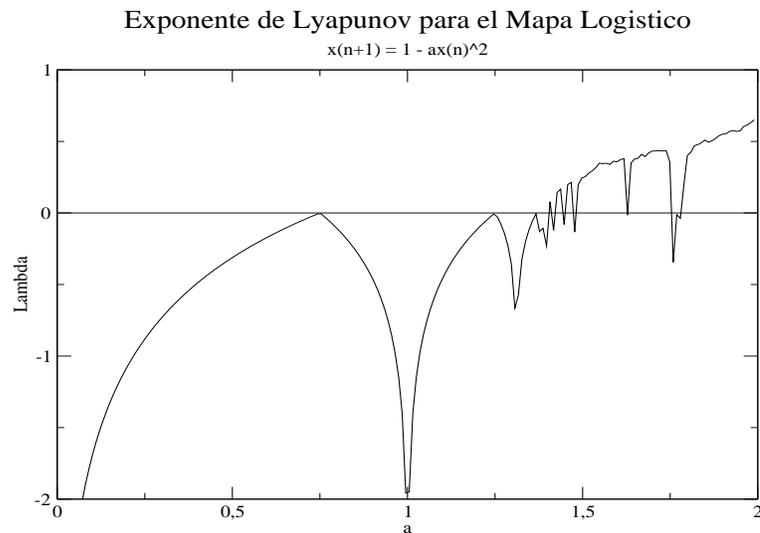


Figura 3.3: Note que λ se mantiene negativo para valores de $a < a_\infty \approx 1,401155$ estas corresponden a las 2^k orbitas. El intervalo caótico es visible a partir de $a \approx 1,401155$, donde λ pasa a tomar valores positivos. Aquí el exponente de Lyapunov generalmente crece, excepto en donde hay ventanas de comportamiento periódico en donde λ decae.

En la figura 3.3, se muestra el exponente de Lyapunov en función del parámetro del mapa del mapa logístico que será utilizado en esta tesis. Este ha sido calculado utilizando:

$$\lambda(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'_a(x_i)|, \quad (3.7)$$

$$f'_a(x_i) = -2ax_i. \quad (3.8)$$

3.1.2. Mapa Logarítmico.

El mapa logarítmico fue estudiado por primera vez por T. Kawabe y Y. Kondo en 1991 [29]. Este es un mapa iterativo que no posee máximos ni mínimos (no acotado) y no pertenece a la clase universal de mapas unimodales. Este mapa pertenece a una familia de mapas singulares del tipo [29, 30][31]:

$$x_{n+1} = f(x_n) = b + |x_n|^z, \quad (3.9)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$, $z < 1$ y b es un parámetro real [31].

El mapa logarítmico tiene la forma:

$$x_{n+1} = b + \ln |x_n|, \quad (3.10)$$

este tipo de mapas singulares es un modelo dinámico simple que muestra caos robusto en el intervalo finito de del parámetro. En este caso $b \in [-1, 1]$ [29, 30][31].

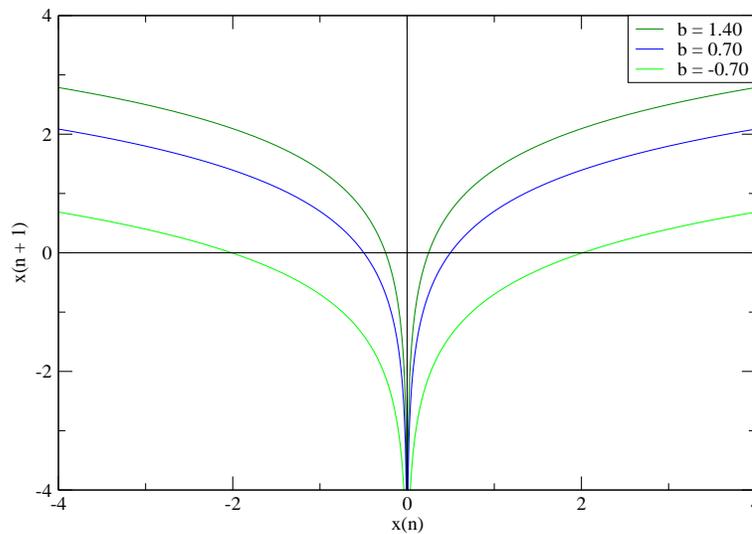


Figura 3.4: Mapa logarítmico, éste no es un mapa unimodal.

Diagrama de Bifurcación.

Como se puede ver en la figura 3.5, no existen ventanas de periodicidad en el rango $b \in [-1, 1]$. Para $b = 1$, ocurre una bifurcación tangente inversa, es decir, presenta transición al caos de *intermitencia tipo I*. Mientras que para $b = -1$, la bifurcación ocurre por período doble inverso, y esta ruta al caos es llamada *intermitencia tipo III* [14].

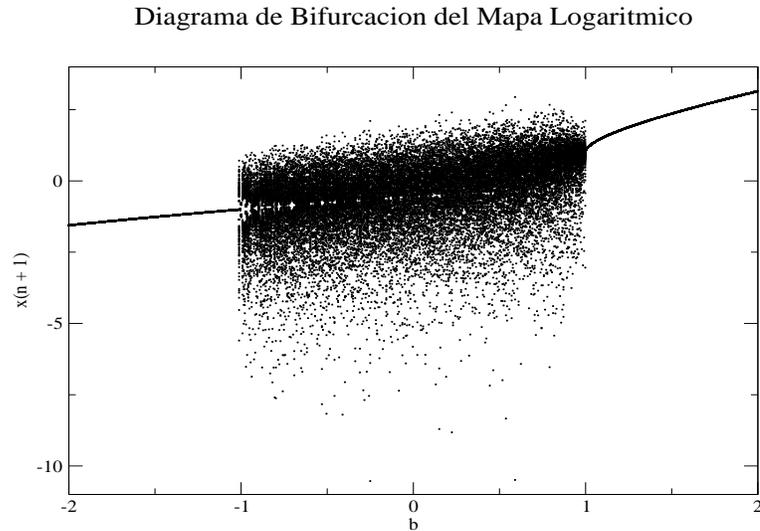


Figura 3.5: Existen puntos fijos para $b < -1$ y $b > 1$. La región caótica se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$, donde no existen ventanas de periodicidad (caos robusto).

Exponente de Lyapunov.

El exponente de Lyapunov para este mapa se muestra en la figura 3.6. Este fue calculado mediante:

$$\lambda(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'_b(x_i)|, \quad (3.11)$$

donde

$$f'_b(x_i) = \frac{1}{|x_i|}. \quad (3.12)$$

El exponente de Lyapunov $\lambda > 0$ en el intervalo $b \in [-1, 1]$, que es la región caótica, para $b \geq 1$ y $b \leq -1$ el exponente es negativo reflejando la periodicidad del sistema en esos rangos [29, 30][31].

3.1.3. ¿Por qué utilizar mapas iterativos?.

Los mapas iterativos deterministas aplicados sobre una variable real son modelos simples de sistemas dinámicos [7][14][28]. El empleo de modelos de sistemas dinámicos basados en mapas está ampliamente extendido.

Manteniendo la misma forma del mapa iterativo, se deja que x describa el estado presente del sistema. A continuación se muestra por qué dicha descripción es útil para modelar sistemas dinámicos:

- Los mapas contienen los ingredientes mínimos de no linealidad para el surgimiento de caos y de bifurcaciones observadas en sistemas provenientes de

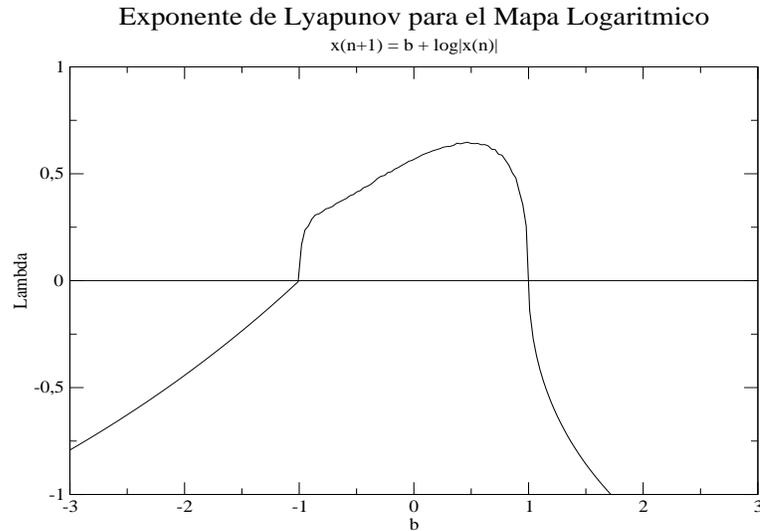


Figura 3.6: Exponente de Lyapunov para en mapa logarítmico como función del parámetro b . λ es positivo en el intervalo $[-1, 1]$.

diversos contextos.

- Las transiciones al caos conocidas pueden describirse mediante mecanismos universales observados en mapas iterativos.
- Debido a su carácter discreto en el tiempo, los modelos basados en mapas son muy eficientes computacionalmente y, en muchos casos, susceptibles de ser tratados analíticamente.
- Cualquier sistema de ecuaciones diferenciales en tiempo continuo debe ser discretizado para ser resuelto por métodos numéricos, lo que en la práctica equivale a iterar un sistema de mapas.
- Los modelos basados en mapas son fáciles de generalizar y extender para incluir diversos efectos, tales como incremento de la dimensionalidad, aleatoriedad, dinámica espaciotemporal, etc.

3.2. Redes de mapas acoplados.

Las redes de mapas acoplados (R.M.A.) son modelos de sistemas dinámicos espaciotemporales, donde tanto el espacio como el tiempo son discretos. Los elementos constituyentes poseen un estado continuo, y la interacción entre estos elementos viene dada por una matriz de acoplamiento. Las R.M.A. fueron introducidos por primera

vez en 1983 por K. Kaneko en su tesis doctoral en la Universidad de Tokyo [32]. Las R.M.A. han sido utilizadas ampliamente para modelar una variedad de procesos en sistemas espaciotemporales, tales como sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, etc. [29, 30][31][33, 34][36][37]. Para la construcción de un modelo R.M.A. se llevan a cabo los siguientes pasos [35]:

- (a) Escoger un conjunto de variables sobre una red. Este conjunto de variables no está definido en un nivel microscópico, sino en nivel macroscópicos, por ejemplo, temperatura, velocidad, concentración de una sustancia química, etc.
- (b) Descomponer los fenómenos en unidades independientes, por ejemplo, convección, reacción, difusión, etc.
- (c) Reemplazar cada unidad por una dinámica simple paralela sobre la red: la dinámica consiste en una transformación lineal de la variable en cada punto de la red y/o un término de acoplamiento con un conjunto adecuado de vecinos.
- (d) Ejecutar la dinámica de cada unidad sucesivamente.

Tabla 3.2: Sistemas dinámicos espacialmente extendidos. $C = Continuo$; $D = Discreto$.

Modelo	Espacio	Tiempo	Estado Local
Ecuaciones Diferenciales Parciales	C	C	C
Mapas Acoplados	D	D	C
Automatas celulares	D	D	D

La expresión general para una R.M.A. es

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \varphi(x_n^j), \quad j \in \{\nu_i\} \quad (3.13)$$

donde x_n^i describe el estado del elemento i en el tiempo discreto n ; $f(x_n^i)$ es la dinámica local del elemento i en el tiempo n ; φ es una función de acoplamiento del elemento i con un conjunto de elementos j que pertenecen a un entorno ν_i . En esta tesis tendremos que $\varphi = \sum_j f$, es decir, el sistema es homogéneo.

El enfoque de basado en R.M.A. es de naturaleza constructiva puesto que se trata de modelar un sistema mediante un combinación de procedimientos y de capturar la fenomenología de un comportamiento espaciotemporal complejo. Si este enfoque conduce a una nueva noción que reproduce algunos fenómenos naturales, entonces podemos *entender* el comportamiento complejo, aun si (o debido a que) la ecuación

del modelo en si misma no se derive completamente de una descripción microscópica. Este punto de vista está basado en la creencia de que existen clases de universalidad en la Física. Un modelo no puede ser exactamente lo mismo que la naturaleza, y tenemos que asumir que hay alguna universalidad de la fenomenología, independiente de los detalles del modelado [35].

En los modelos basados en R.M.A. se buscan nuevas clases cualitativas de universalidad, sin preocuparse de los detalles de la fenomenología. Mediante estos modelos podemos entender cómo tal fenomenología aparece, a cuál clase pertenece, y cuál es la esencia del fenómeno. Solamente a través de este tipo de enfoque podemos entender por qué cierto tipo de comportamiento complejo es común en la naturaleza, independientemente de los detalles, y entonces podemos predecir qué clase de sistemas conducen a tal comportamiento [35].

3.2.1. Acoplamiento Global, Local y No Local.

Como es bien conocido, existen varios tipos de acoplamiento, como lo es el acoplamiento local, donde los elementos $k_i \in \{\nu_i\}$ son elegidos entre vecinos inmediatos. Como por ejemplo, en una red unidimensional, los vecinos inmediatos del nodo i son los elementos $i + 1$ e $i - 1$:

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \gamma \sum_{j=i-1}^{i+1} f(x_n^j) - 2\gamma f(x_n^i), \quad (3.14)$$

donde γ es un parámetro que representa un acoplamiento de tipo difusivo. También tenemos el acoplamiento global, en el cual $k_i = N \quad \forall i$, cada elemento se encuentra acoplado con todos los demás elementos de la red:

$$x_{n+1}^i = f(x_n^i) + \gamma \sum_{j \neq i} f(x_n^j) - N\gamma f(x_n^i). \quad (3.15)$$

En esta tesis, los sistemas R.M.A. son modelados con un acoplamiento que se encuentra entre el acoplamiento global y local. Es decir, algunos elementos del conjunto $\{\nu_i\}$ no se encuentran acoplados con los vecinos inmediatos de la celda i , sino que pueden estar conectado con cualquier otro elemento de la red. Este tipo R.M.A. se dice que tienen un acoplamiento no local o aleatorio. De esta manera la ecuación 3.15 se convierte en:

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_n^i) + \frac{\epsilon}{N_i} \sum_{j \in \{\nu_i\}}^{N_i} f(x_n^j), \quad (3.16)$$

donde $\epsilon = \text{constante}$ y N_i es el número de vecinos del elemento i .

3.3. Sincronización en R.M.A.

La sincronización es uno de los estados colectivos más comunes que surgen en una variedad de sistemas. La sincronización en R.M.A. consiste en la condición $x_n^i = x_n^j$, $\forall i, j$.

Debido a la sensibilidad de las condiciones iniciales, surge naturalmente la pregunta si ocurre sincronización completa en un ensemble caótico cuando el número de elementos interactuantes N es muy grande, es decir, $N \rightarrow \infty$.

Considérese un sistema de N mapas caóticos acoplados con acoplamiento lineal difusivo:

$$x_{n+1}^i = \sum_{j=1}^N L^{ij} f(x_n^j) \quad (3.17)$$

donde el acoplamiento es representado por un operador $\hat{\mathbf{L}}$ dado por una matriz $N \times N$. Entonces:

- (i) El sistema 3.17 posee una solución de sincronización completamente simétrica donde los estados de todos los elementos son idénticos:

$$x_n^1 = x_n^2 = \dots = x_n^N \quad (3.18)$$

Este es el caso si el vector constante $\mathbf{e}_1 = (1 \dots 1)$ es el autovector de la matriz $\hat{\mathbf{L}}$ correspondiendo a un autovalor $\sigma_1 = 1$.

- (ii) Todos los otros autovalores de $\hat{\mathbf{L}}$ son menores que 1, en valor absoluto.

De modo que para que exista sincronización en un sistema de N elementos éste debe cumplir con (i) e (ii) [38].

3.3.1. Sincronización caótica y acoplamiento local.

En sistemas espacialmente extendidos con acoplamiento local, tales como los que hemos estado discutiendo en este capítulo, el estado sincronizado caótico no es estable. Para ilustrar esto, partiremos del sistema autónomo descrito por M. Pineda y M. Cosenza[39].

Consideremos el siguiente sistema de R.M.A. donde f es el mapa logarímico con parámetro $b = -0,70$ (Sección 3.1.2):

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon_2)f(x_n^i) + \frac{\epsilon_1}{2}[f(x_n^{i+1}) + f(x_n^{i-1}) - 2f(x_n^i)] + \frac{\epsilon_2}{N} \sum_{i=1}^N f(x_n^i), \quad (3.19)$$

ϵ_1 es el parámetro de acoplamiento local y ϵ_2 es el parámetro de acoplamiento global. Expresando en forma vectorial la ecuación 3.19 tenemos:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \left[(1 - \epsilon_2)\mathbf{I} + \frac{\epsilon_1}{2}\mathbf{L} + \frac{\epsilon_2}{N}\mathbf{G} \right] \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad (3.20)$$

donde la conectividad local viene dada por la matriz \mathbf{L} de tamaño $N \times N$, la cual expresa el acoplamiento difusivo (ver la sección anterior) entre los elementos, y cuyas componentes son $L_{ii\pm 1} = 1$, $L_{ii} = -2$ y $L_{ij} = 0$. \mathbf{G} es la matriz $N \times N$ de conectividad global, con todos sus elementos iguales a 1.

El análisis de estabilidad lineal del estado sincronizado descrita en la sección anterior en (ii), para éste sistema conduce a la condición:

$$\left| \left(1 - \epsilon_2 + \frac{\epsilon_1}{2}\nu_j + \frac{\epsilon_2}{N}\gamma_j \right) e^\lambda \right| < 1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.21)$$

donde ν_j son los autovalores de la matriz \mathbf{L} , γ_j son los autovalores de \mathbf{G} , con dos autovalores, el autovalor N y el autovalor cero teniendo $N-1$ grados de degeneración,

$$\nu_j = -4 \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad \gamma_j = \delta_{0j}N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (3.22)$$

y λ es el exponente de Lyapunov del mapa local, el cual es siempre positivo en una región caótica. Observe que para $j = 0$ la condición 3.21 ya no se cumple, resultando:

$$\left| e^\lambda \right| \geq 1. \quad (3.23)$$

Para los autovalores $j \neq 0$ tenemos que existe un intervalo de ϵ_2 para el cual se cumple 3.21,

$$1 - 2\epsilon_1 \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) - e^{-\lambda} < \epsilon_2 < 1 - 2\epsilon_1 \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) + e^{-\lambda}. \quad (3.24)$$

Sin embargo, note que si no existe acoplamiento global, es decir, si $\epsilon_2 = 0$, la condición 3.21 tampoco se cumple, quedando:

$$\left| \left(1 + \frac{\epsilon_1}{N}\nu_j \right) e^\lambda \right| \geq 1, \quad (3.25)$$

independiente del valor que tenga el autovalor j . De modo que no es suficiente un acoplamiento local difusivo para que un sistema de tamaño $N \rightarrow \infty$ se sincronice. En otras palabras, deben existir acoplamientos de largo alcance para que exista sincronización en un sistema de mapas caóticos acoplados.

3.3.2. Sincronización y el Modelo de Watts y Strogatz.

Las redes de mapas acoplados también pueden definirse sobre una red de pequeño mundo descrita por el modelo de Watts y Strogatz. Los simples nodos matemáticos son reemplazados por mapas. Es decir, supongamos que se tiene una red unidimensional de N mapas logísticos acoplados, con acoplamiento constante. El campo medio de una red de mapas acoplados se define como:

$$h_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^i. \quad (3.26)$$

El grado de sincronización en el sistema puede caracterizarse por la desviación estándar, definida por

$$\sigma = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_n^i - h_t]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.27)$$

Cuando el sistema está sincronizado, $\sigma \rightarrow 0$. La figura 3.7 muestra la desviación estándar asintótica promediada después de desprestigiar un transiente, como función de la probabilidad de recableado p en una red de pequeño mundo del tipo Watts y Strogatz (ver figura 2.4), donde la dinámica de los nodos está descrita por mapas logísticos caóticos.

Se observa que el sistema alcanza un estado sincronizado, con $\sigma \approx 0$, para distintos valores de la probabilidad p que dependen del parámetro de acoplamiento. Mientras mayor es el acoplamiento ϵ , menor es el valor crítico de la probabilidad p para el cual los mapas se sincronizan.

La figura 3.8 muestra la desviación estándar asintótica para un sistema de mapas logarítmicos caóticos acoplados sobre una red de pequeño mundo, en función de la probabilidad de reconexión p . Nótese que la sincronización caótica también ocurre en este sistema para probabilidades de reconexión p altas. Estos resultados muestran que la presencia de conexiones de largo alcance, como las que se generan en una red de pequeño mundo al variar p , inducen sincronización en un sistema de elementos caóticos. En el siguiente Capítulo estudiaremos el problema inverso, es decir, investigaremos como la búsqueda de sincronización entre elementos caóticos puede inducir

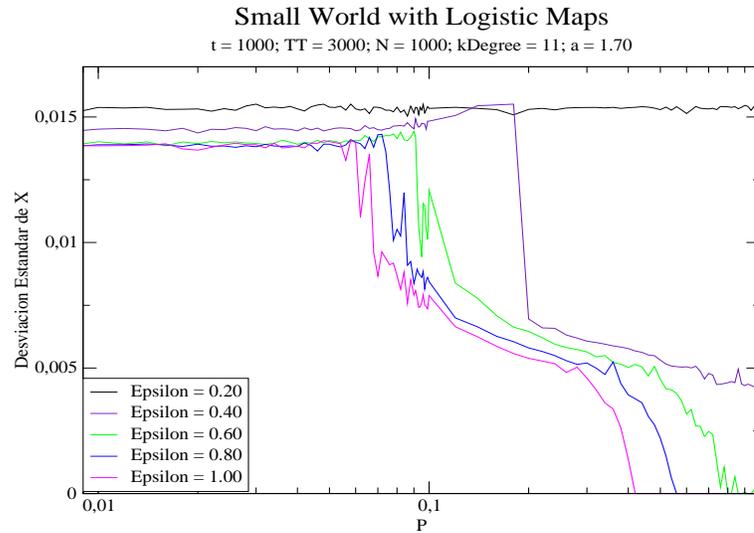


Figura 3.7: Desviación estándar promedio en función de la probabilidad de reconexión p para mapas logísticos acoplados sobre una red de pequeño mundo. Las líneas correspondientes a distintos valores de acoplamiento se representan por un color diferente. $N = 1000$; $k = 22$ donde el nodo i tendrá 11 vecinos del lado derecho y 11 del lado izquierdo; $t = 1000$; $T_{transiente} = 3000$ y $a = 1,70$.

la emergencia de redes de pequeño mundo.

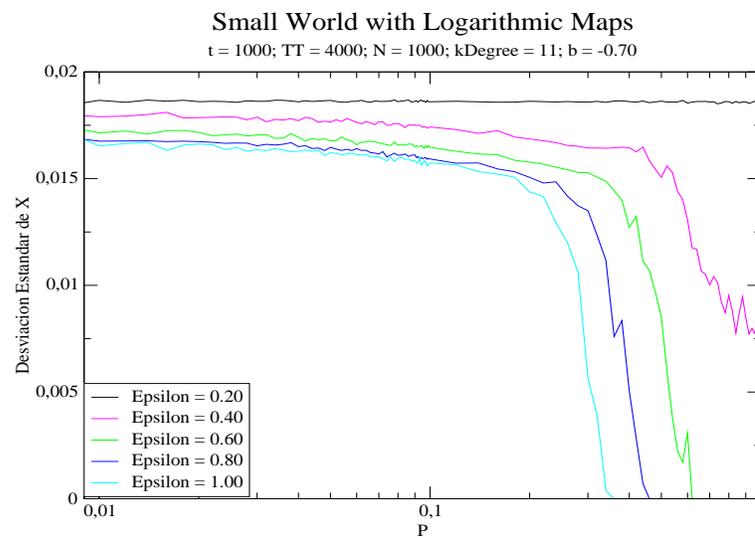


Figura 3.8: Desviación estándar promedio en función de la probabilidad de reconexión p para mapas logarítmicos acoplados sobre una red de pequeño mundo. Las líneas correspondientes a distintos valores de acoplamiento se representan por un color diferente. $N = 1000$; $k = 22$ donde el nodo i tendrá 11 vecinos del lado derecho y 11 del lado izquierdo; $t = 1000$; $T_{transiente} = 3000$ y $b = 0 - ,70$.

*Climate is what we expect, weather
is what we get.*

Mark Twain

Capítulo 4

Emergencia de pequeño mundo en sistemas coevolutivos de mapas caóticos

4.1. Modelo coevolutivo de mapas acoplados.

Como hemos visto en el Capítulo 2, una de las características principales de las redes de pequeño mundo es su ubicuidad; es decir, que se observan en una gran variedad de sistemas naturales y artificiales. Sin embargo, estas estructuras no han sido específicamente diseñadas sino que el efecto de pequeño mundo emerge espontáneamente.

En este contexto, una pregunta fundamental que se ha planteado en los últimos años es: ¿Cuáles procesos pueden conducir a sistemas tales como redes neuronales, redes de proteínas, world-wide web, redes sociales, etc, a tener una estructura de red de *pequeño mundo*?. En este Capítulo se investiga un mecanismo basado en un modelo de mapas acoplados planteado recientemente por P. Gong y C. Van Leeuwen [6], el cual permite la aparición de redes de pequeño mundo.

El modelo presentado originalmente por P. Gong y C. Van Leeuwen [6] consiste en un conjunto de mapas cuyas conexiones dependen de los estados de estos mapas. Se trata de un sistema donde la dinámica de los elementos afecta la topología de conectividad entre ellos, y a la vez, la dinámica de cada elemento depende de las conexiones que éste tenga. Es decir, que los estados y la topología de la red están acoplados y *coevolucionan* y/o se *adaptan* en el tiempo.

Consideremos un sistema de N mapas

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_n^i) + \frac{\epsilon}{N_i} \sum_{j \in \nu_i} f(x_n^j), \quad (4.1)$$

donde x_n^i es la actividad del mapa i -ésimo ($i = 1, \dots, N$) en el n -ésimo paso del tiempo. ν_i es el conjunto de vecinos del mapa i y N_i es la cardinalidad de ese conjunto. Los vecinos de i son aquellos mapas que tienen una conexión directa con i . La conexión es bi-direccional. El parámetro ϵ es el acoplamiento constante. La dinámica local está dada por la función f .

En el modelo original de P. Gong y C. Van Leeuwen [6] los mapas se encuentran inicialmente conectados en una red aleatoria. Para garantizar que la red aleatoria no posea nodos inconexos debe cumplirse la condición

$$L_c \gg \frac{N}{2} \ln(N), \quad (4.2)$$

donde L_c es el número de enlaces o conexiones presentes en la red. P. Gong y C. Van Leeuwen utilizaron $L_c = 5200$ y $N = 300$, valores que satisfacen esta condición.

La coherencia $d_{ij}(n)$ entre la unidad i y la unidad j se define como

$$d_{ij}(n) = |x_n^i - x_n^j|. \quad (4.3)$$

P. Gong y C. Van Leeuwen emplearon mapas logísticos de la forma $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$, $x_n \in [-1, 1]$, como dinámica local.

En este trabajo investigaremos el rol de la dinámica local en el surgimiento de la red de pequeño mundo y utilizaremos también mapas logarítmicos $x_{n+1} = b + \ln|x_n|$, $x_n \in (-\infty, \infty)$. También exploraremos la influencia de la topología de conectividad inicial y consideraremos redes regulares como condición inicial. Igualmente, estudiaremos la influencia de los parámetros del sistema en el surgimiento de redes de pequeño mundo.

4.1.1. Algoritmo de reconexión.

Partiendo de una distribución inicial aleatoria y uniforme de los valores de los mapas en su intervalo de definición, la dinámica del sistema se realiza iterando el siguiente algoritmo:

- I En un tiempo n se elige de manera aleatoria un mapa i y se calculan las distancias $d_{ij}(n) \forall j \neq i$.

- II Se buscan los mapas $j = j_1 \in \nu_i$ tal que $d_{ij_1}(n)$ es máxima, y $j = j_2 \notin \nu_i$ tal que $d_{ij_2}(n)$ es mínima.
- III Si $d_{ij_1}(n) > d_{ij_2}$, entonces el mapa i corta su conexión con j_1 y se conecta con j_2 , es decir, ahora $j_2 \in \nu_i$ y $j_1 \notin \nu_i$. Si no, se regresa a I.
- IV Se regresa al paso I.

4.2. Resultados del modelo.

Para caracterizar la presencia de una red de pequeño mundo calculamos diversas cantidades estadísticas de la red de conectividad, tales como el coeficiente de agrupamiento, la longitud característica, la distribución del número de vecinos por elemento, el número de grupos de elementos conectados y el coeficiente de agrupamiento en el estado asintótico.

Como se mostró en el Capítulo 2, una red de pequeño mundo se caracteriza por poseer un coeficiente de agrupamiento alto y una longitud característica pequeña comparada con el tamaño del sistema. Adicionalmente debe tener una distribución vecinos k_i alrededor de un valor medio, a diferencia de una red libre de escala donde esta distribución sigue una ley de potencia. Cabe resaltar que una red libre de escala puede ser a su vez una red de pequeño mundo, pero lo contrario no se cumple en general.

4.2.1. Para una red inicial aleatoria.

Mapa logístico.

La figura 4.1 muestra el coeficiente de agrupamiento CC en función del tiempo, para varios valores del parámetro de acoplamiento ϵ y una red inicial aleatoria de mapas logísticos. Note que para valores de $\epsilon > 0,4$, el coeficiente de agrupamiento de la red alcanza valores relativamente altos y luego mantiene un valor asintótico fluctuante alrededor de un valor CC_m donde por ejemplo para el caso $\epsilon = 0,50$ el coeficiente de agrupamiento inicial es $CC_i = 0,058$ y $CC_m \approx 0,584$, mientras que la longitud característica se mantiene pequeña, con una longitud característica inicial de $Lc_i = 2,3$ que evoluciona a $Lc_m = 2,66$ [6]. Las fluctuaciones mostradas son del orden de $\leq 10^{-3}$.

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran el coeficiente de agrupamiento asintótico promedio CC_m en función de ϵ para una red aleatoria inicial de mapas logísticos acoplados. Se

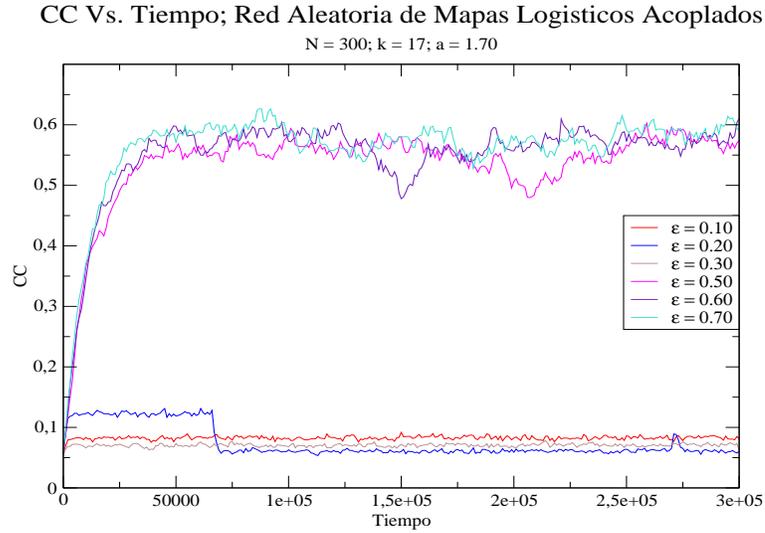


Figura 4.1: El coeficiente de agrupamiento o clustering CC de un sistema de N mapas acoplados en función del tiempo. CC aumenta rápidamente en los primeros $n = 50000$ pasos de tiempo.

observa que CC_m tiene una transición desde valores pequeños a valores altos típicos de redes de pequeño mundo ($CC \geq 0,6$) para un valor crítico $\epsilon \approx 0,4$, con un coeficiente $CC_m > 0,5$ y una longitud característica $Lc_m < 3,5$. En la figura 4.3 se observa una transición mucho más suave y se encuentra desplazada hacia abajo para un parámetro del mapa $a = 1,99$, en donde se necesitan $\epsilon > 0,80$ para que las cantidades macroscópicas de la estructura se encuentren en el intervalo definido por las redes de *pequeño mundo* definido en 2.

La figura 4.4 muestra la distribución de probabilidad del número de vecinos k_i por elemento, La red de conexión final tiene una distribución de probabilidad de conexión que puede ser fijada como una distribución de Poisson, $p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ con $\lambda = 17,8$ [6]. En este trabajo todas las distribuciones fueron realizadas haciendo un promedio sobre 1000 distribuciones en 1000 iteraciones de tiempo después de un transiente $TT = 200000$.

Mapa logarítmico.

La figura 4.5 muestra el coeficiente de agrupamiento CC en función del tiempo, para varios valores del parámetro de acoplamiento ϵ y una red inicial aleatoria de mapas logarítmicos. El comportamiento es similar a 4.1. Con $\epsilon = 0,4$ el coeficiente de agrupamiento inicial $CC_i = 0,0585$ y en el estado asintótico $CC_m = 0,165$; donde la longitud característica es $Lc_i = 2,289$ inicialmente y $Lc_m = 2,295$ para n iteraciones de tiempo. Note que para $\epsilon = 1,00$ y $n > 175000$ no hay variaciones en CC esto se

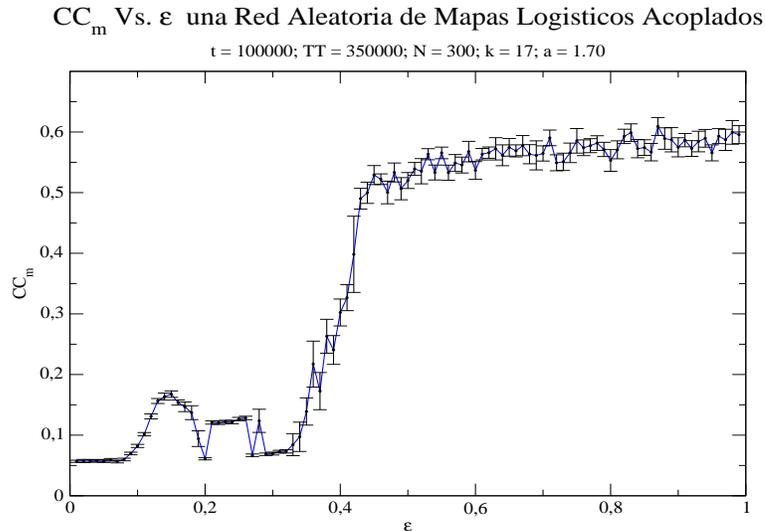


Figura 4.2: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ . Se muestra una fuerte dependencia que existe entre el coeficiente de agrupamiento y el acoplamiento.

debe a que los mapas se encuentran sincronizados.

Las figuras 4.6 y 4.7 muestran CC_m vs ϵ para una red aleatoria inicial de mapas logarítmicos acoplados. Se observa que el surgimiento del efecto pequeño mundo no depende de los detalles de la dinámica local. Sin embargo, se observa una transición mucho más suave que en 4.2 y 4.3, y además se necesitan $\epsilon > 0,60$ para que las cantidades macroscópicas de la estructura se encuentren en el intervalo definido por las redes de *pequeño mundo*.

En la figura 4.7 la transición se encuentra desplazada hacia la derecha para un parámetro del mapa $b = 0,80$, y las cantidades CC_m y Lc se encuentra fuera del rango perteneciente a *pequeño mundo*.

La figura 4.8 muestra la distribución de probabilidad del número de vecinos k_i por elemento, la red de conexión final tiene una distribución de probabilidad de conexión que puede ser fijada como una distribución de Poisson, $p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ con $\lambda \approx 17$.

En la figura 4.9 se muestra el número de grupos desconexos en la red de mapas logarítmicos en función de ϵ . Se observa que para valores de ϵ altos, la red se fracciona formando varios grupos; esto se debe al rango infinito de valores de los mapas que no facilitan la obtención de valores pequeños de coherencia que permitan una reconexión, aquí existe un grupo muy grande donde los mapas están sincronizados y muchos mapas aislados. En contraste, una red de mapas logísticos acoplados no se rompe en subredes fácilmente.

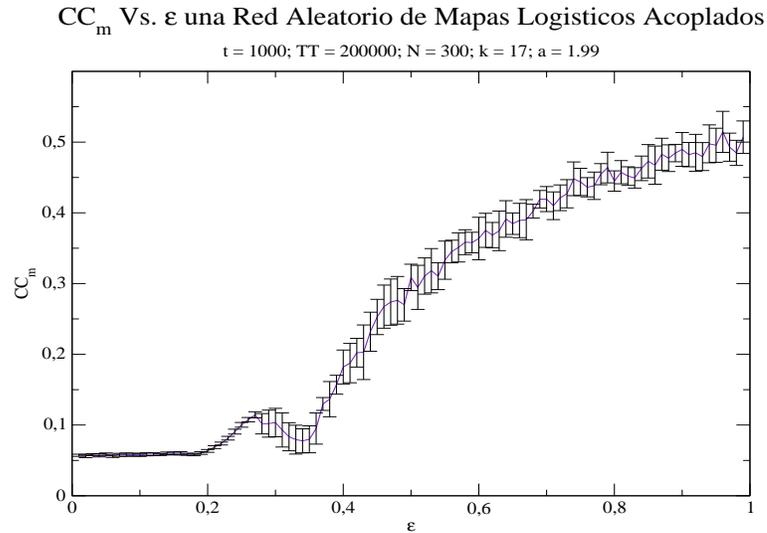


Figura 4.3: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

4.2.2. Para un red inicial regular.

Mapa logístico.

La figura 4.10 muestra el coeficiente de agrupamiento CC en función del tiempo, para varios valores del parámetro de acoplamiento ϵ y una red inicial regular de mapas logísticos. Note como el coeficiente de agrupamiento cae alcanzando valores típicos de una red aleatoria, posteriormente aumenta alcanzando valores de una red de pequeño mundo.

En la figura 4.11 se observa como la longitud característica de una red regular de mapas logístico acoplados decae rápidamente y a diferencia del coeficiente de agrupamiento, la longitud característica una vez que alcanza valores pequeños se mantiene así a lo largo del tiempo.

En las figuras 4.12 y 4.13 muestran CC_m vs. ϵ para una red regular unidimensional inicial de mapas logísticos acoplados. Note que el incremento de CC_m a partir de un valor dado de ϵ no depende de la estructura inicial de la red. Note la semejanza entre esta figura y la figura 4.2. Donde para $\epsilon > 0,4$ la estructura muestra características del tipo redes de *pequeño mundo* [12] con un coeficiente $CC_m > 0,5$ y una longitud $Lc_m < 3,5$.

En la figura 4.13 el efecto del parámetro del mapa a es el mismo que se observa en la figura 4.3. La transición es mucho más suave y se encuentra desplazada hacia abajo. CC_m se encuentran fuera del intervalo de *pequeño mundo* [12].

La figura 4.14 muestra la distribución de probabilidad del número de vecinos k_i por

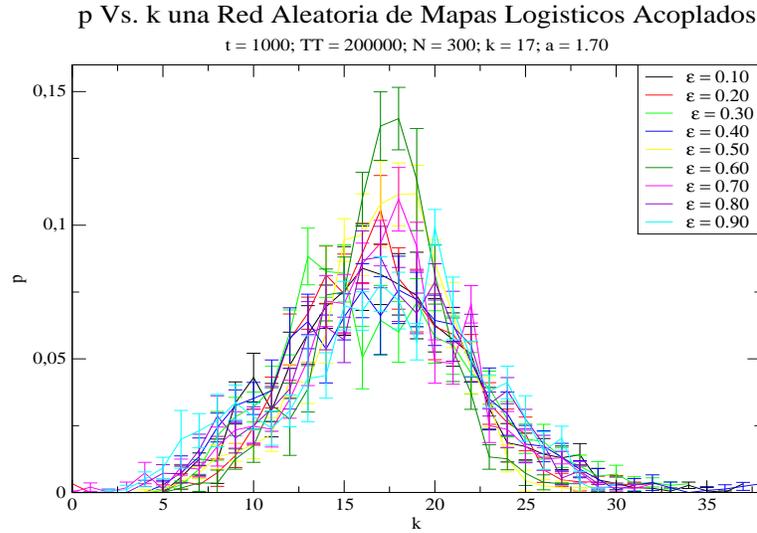


Figura 4.4: Probabilidad de conexión p en función del número de vecinos k .

elemento. Un sistema de redes de mapas acoplados logísticos cuya estructura inicial es una red regular, un anillo unidimensional, con $k = 18$ donde $kDegree = 9$ indica que los nodos tienen inicialmente 9 vecinos a su lado derecho y 9 a su lado izquierdo. Se tiene para el estado asintótico final una distribución de vecinos que puede ser fijada como una distribución de Poisson, $p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ con $\lambda \approx 33,6$.

Mapa logarítmico.

Las figuras 4.15 y 4.16 muestran CC_m vs ϵ para una red regular de mapas logarítmicos acoplados. Nuevamente se observa que la estructura inicial no influye determinantemente en el incremento del CC_m . En 4.15 se observa una transición mucho más suave, pero a pesar de ello se necesitan acoplamientos $\epsilon > 0,60$ para que las cantidades macroscópicas de la estructura se encuentren en el intervalo de las redes de *pequeño mundo*. Mientras que en 4.16 la transición es suave y se encuentra desplazada hacia abajo para un parámetro del mapa $b = 0,80$ como ocurre en la figura 4.7. Las cantidades CC_m y Lc se encuentran fuera del intervalo de *pequeño mundo*.

La figura 4.17 muestra la distribución de probabilidad del número de vecinos k_i por elemento. Aquí los mapas parten de una red regular. La red de conexión final tiene una distribución de probabilidad de conexión que puede ser fijada como una distribución de Poisson, $p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ con $\lambda \approx 17$.

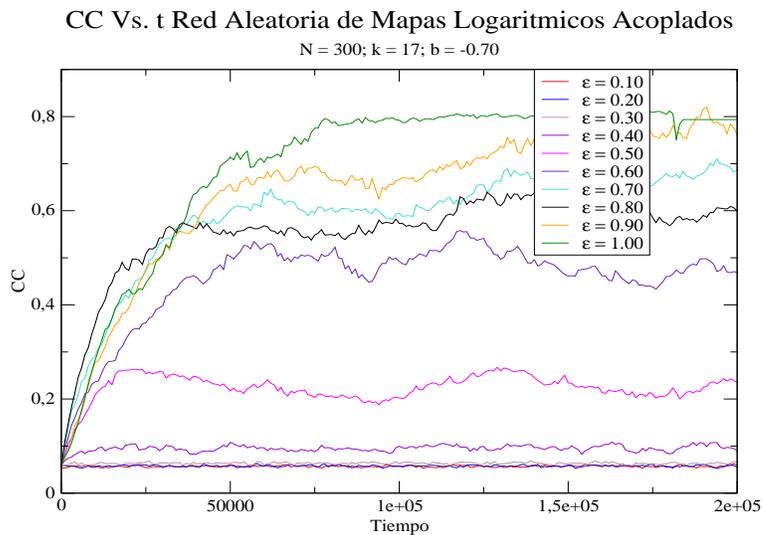


Figura 4.5: CC en función del tiempo, se observa la dependencia de CC del acoplamiento ϵ al igual que ocurre en 4.1 para mapas logísticos.

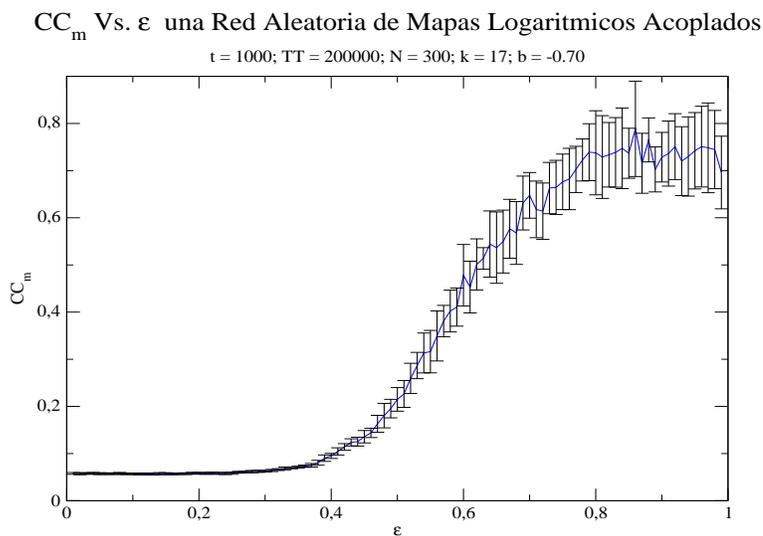


Figura 4.6: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

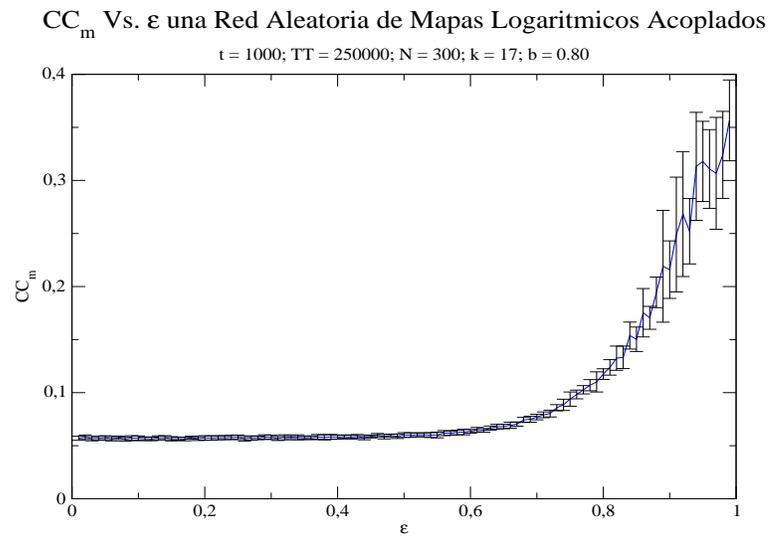


Figura 4.7: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

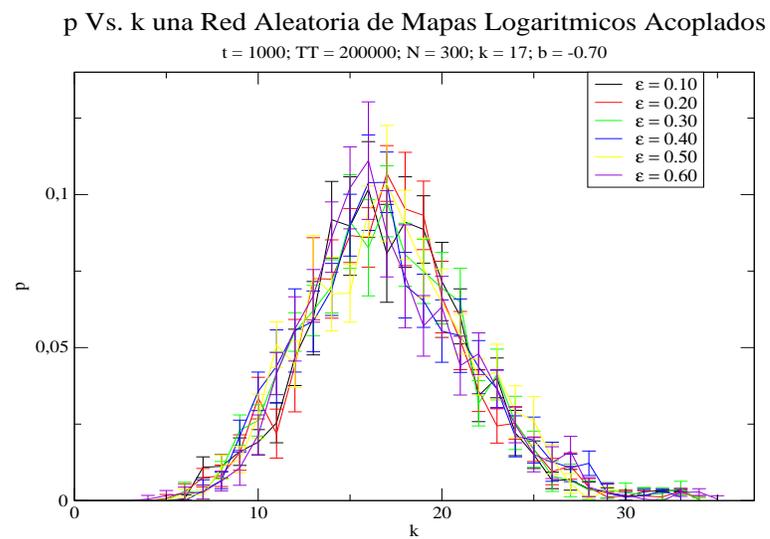


Figura 4.8: Probabilidad de conexión p en función del número de vecinos k .

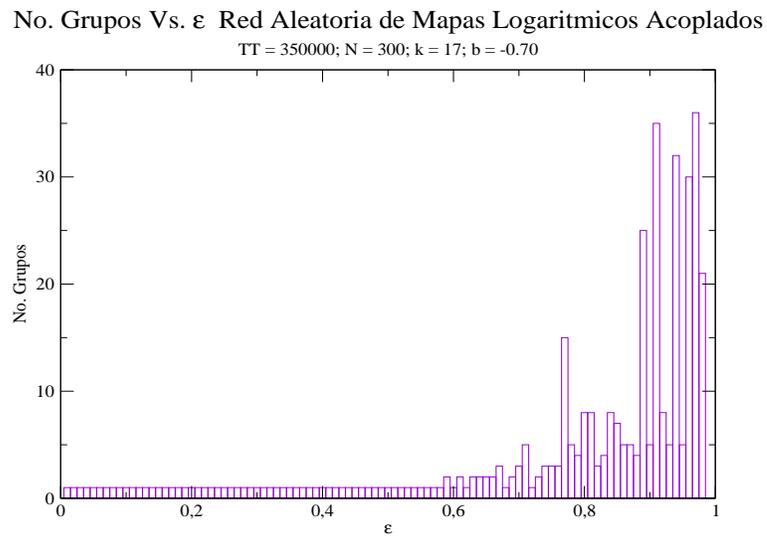


Figura 4.9: Grupos disconexos formados por los mapas logarítmicos que parten de una red aleatoria.

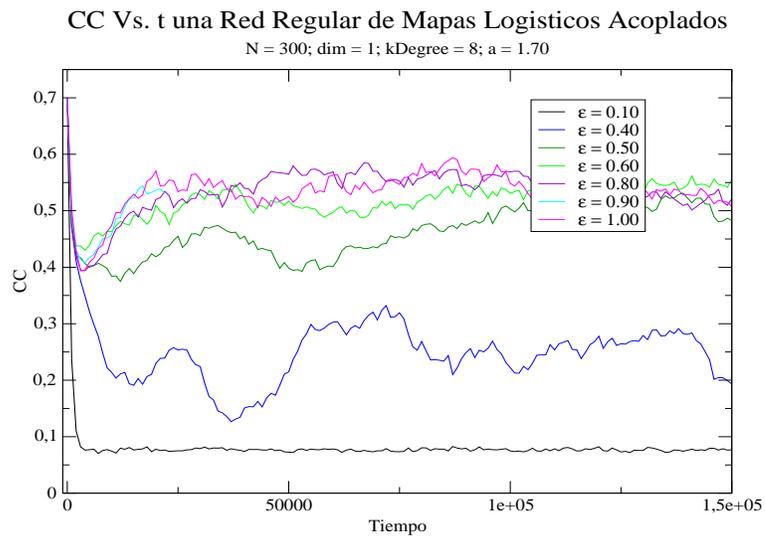


Figura 4.10: CC en función del tiempo para una red regular de mapas logísticos acoplados.

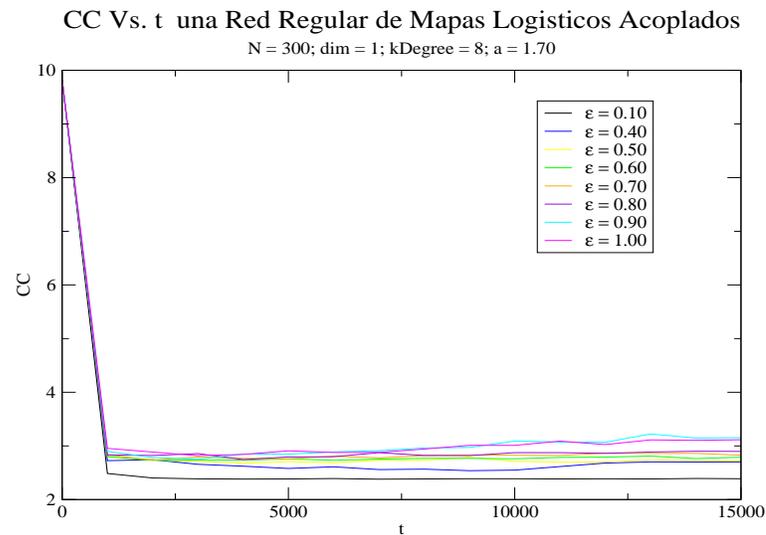


Figura 4.11: L_c en función del tiempo para una red regular de mapas logísticos acoplados.

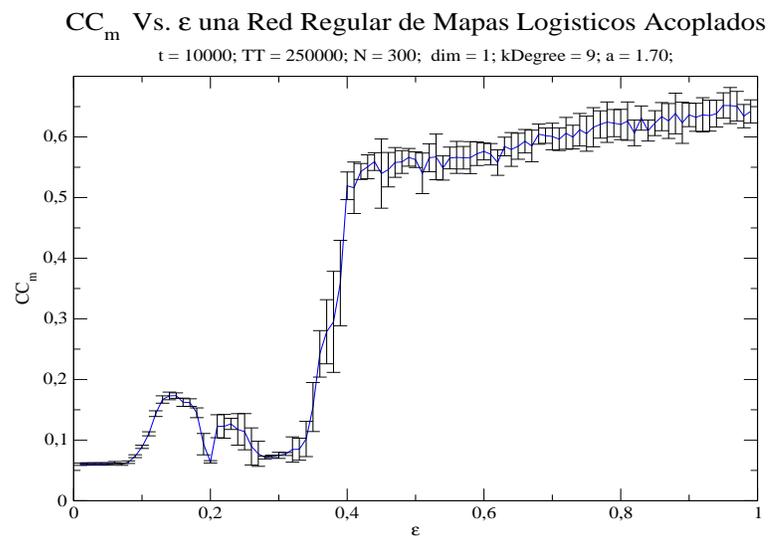


Figura 4.12: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

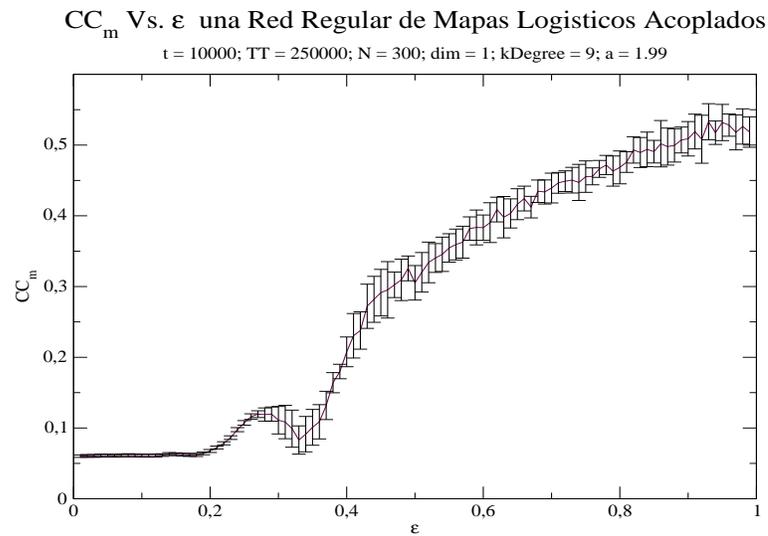


Figura 4.13: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ

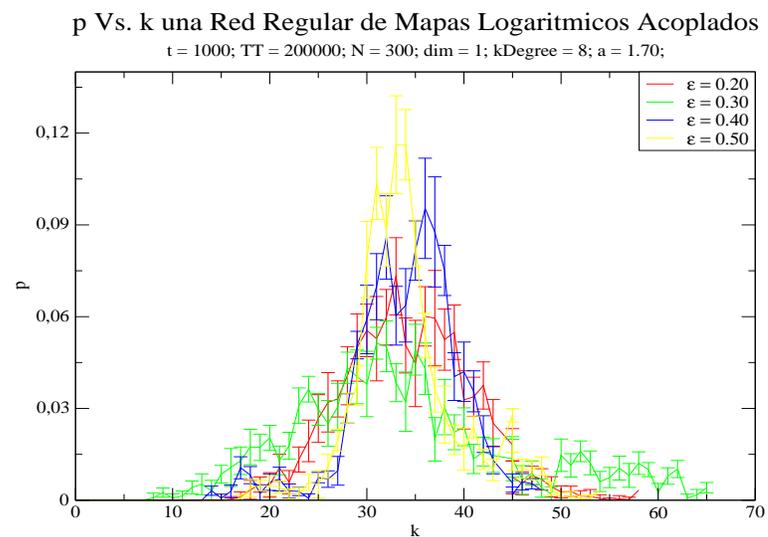
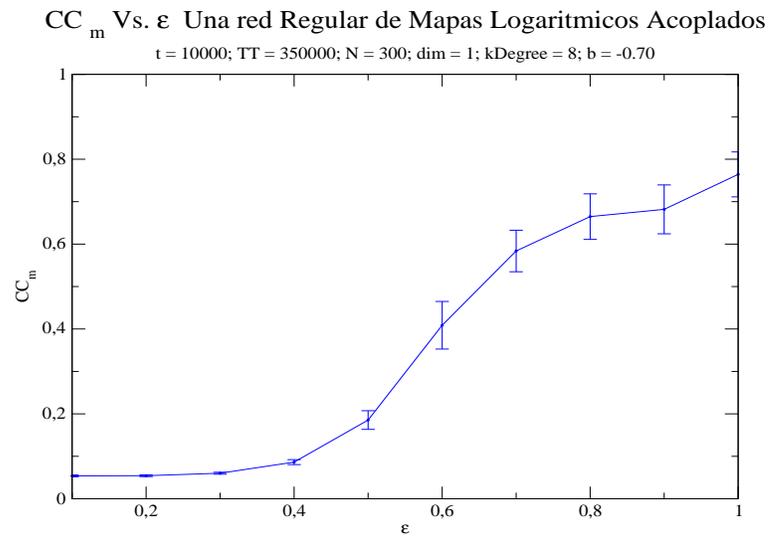
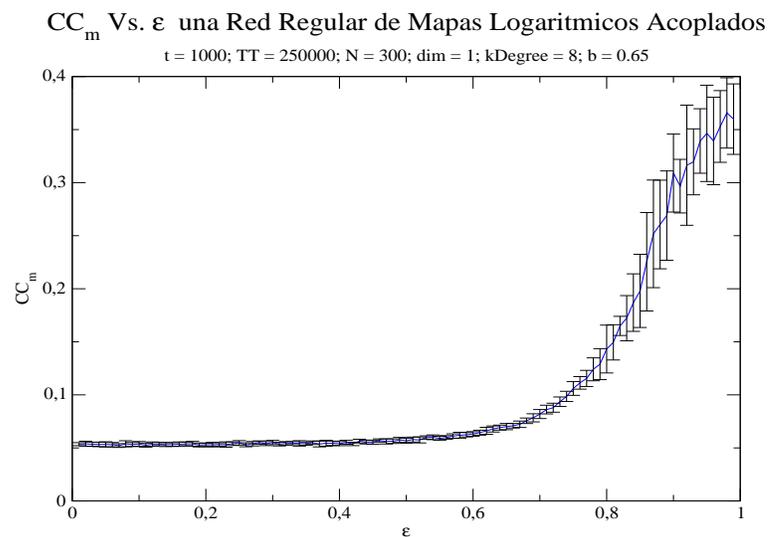


Figura 4.14: Probabilidad de conexión p en función del número de vecinos k .

Figura 4.15: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ .Figura 4.16: CC_m en función del parámetro de acoplamiento ϵ .

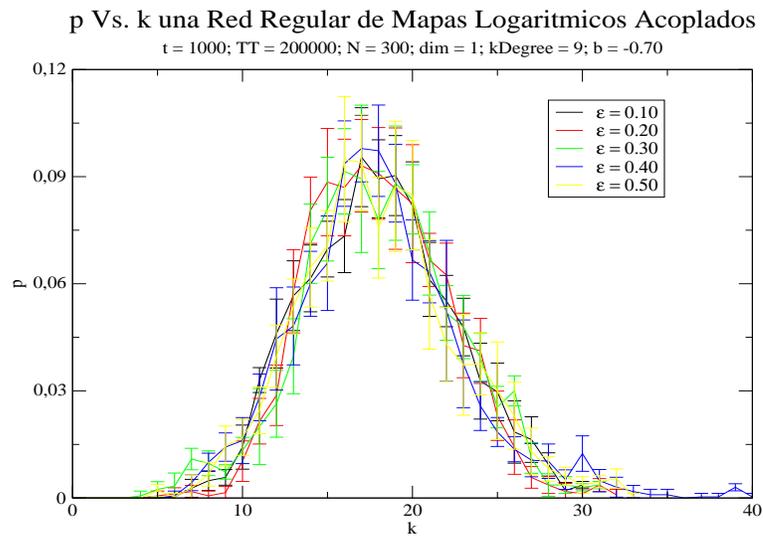


Figura 4.17: Probabilidad de conexión p en función del número de vecinos k .

*Before the beginning of great
brilliance, there must be chaos.*

I Ching

Capítulo 5

Conclusiones

En los últimos años ha habido un gran interés en el estudio de redes de *pequeño mundo*. En particular, se ha demostrado que una gran variedad de sistemas complejos, tales como las redes neuronales, las redes de proteínas y las redes sociales, entre otras, forman espontáneamente estructuras que tienen propiedades universales y que se pueden describir mediante redes de *pequeño mundo*. Una propiedad esencial de este tipo de redes es que permiten la transmisión de información entre elementos de manera muy eficiente [12]. Como hemos visto en el Capítulo 3 las redes de *pequeño mundo* también facilitan la sincronización entre elementos debido a la existencia de conexiones de largo alcance.

Un aspecto fundamental consiste en conocer los mecanismos que llevan a la formación de estructuras con propiedades de pequeño mundo. En esta tesis hemos investigado un posible mecanismo que induce la emergencia de este tipo de topología en un modelo simple de mapas caóticos acoplados. Hemos extendido el estudio del modelo coevolutivo propuesto por P. Gong y C. Van Leeuwen [6] en el cual la estructura de la red de conectividad cambia de acuerdo a los estados de los elementos. La característica principal este modelo es que la reconexión entre los mapas es estimulada por la búsqueda de sincronización entre ellos. Hemos mostrado que este mecanismo simple es suficiente para formar eventualmente estructuras con propiedades de pequeño mundo.

En el Capítulo 4 hemos caracterizado las propiedades estadísticas de las redes mediante cantidades como el coeficiente de agrupamiento, la longitud característica, la distribución del número de vecinos y la distribución del número de grupos. Hemos encontrado que la emergencia de una red de pequeño mundo ocurre para valores suficientemente grandes del parámetro de acoplamiento $\epsilon > 0,4$ entre los elementos,

para paámetros del mapa logístico $a = 1,70$ y del mapa logarítmico $b = -0,70$. Vimos que la dinámica local (mapa logístico o mapa logarítmico) si es muy relevante para que surja este tipo de red, haciendo que el acoplamiento entre los elementos se encuentre alrededor de $\epsilon = 0,80$. El rango infinito de definición del mapa logarítmico puede producir un fraccionamiento de la estructura, donde la subred más grande posee propiedad de pequeño mundo. Por otro lado, hemos demostrado que el surgimiento de una red de pequeño mundo en este modelo es un fenómeno robusto, es decir, no depende de la red de conectividad inicial.

Cabe destacar que los estados de los elementos siempre cambian en el tiempo, pero las reconexiones para tiempos muy grandes ($n > 100000$) no modifican las propiedades estadísticas de la red formada en el sistema. Es decir, la red de pequeño mundo emergente es estadísticamente estacionaria.

Uno de los rasgos más relevantes del presente modelo es que se trata de un sistema coevolutivo, donde la estructura se adapta a la dinámica de los elementos y a su vez los estados de estos dependen de la conectividad de la estructura. En la actualidad, existe un gran interés en el estudio de sistemas coevolutivos, donde la dinámica y la topología están interrelacionadas. Este tipo de coevolución y/o adaptación se encuentra ampliamente en sistemas biológicos, sociales, económicos, fisiológicos, etc. El presente modelo simple puede contribuir al avance en la comprensión de estos sistemas complejos que constituyen una de las fronteras actual de la Ciencia.

Bibliografía

- [1] Ehrhardt, G. C. M. A., M. Marsili, y F. Vega-Redondo, *Phys. Rev. E* **74**(3), 036106 (2006).
- [2] M. G. Zimmermann, V. M. Eguíluz y M. S. Miguel, *Phys. Rev. E* **72**, 056118 1-15 (2005).
- [3] M. G. Zimmermann, V. M. Eguíluz y M. S. Miguel, *Phys. Rev. E* **69**, 065102 (2004).
- [4] Gil S. y D. H. Zanette, *Phys. Lett. A* **356**, 89 (2006).
- [5] Petter Holme y M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E* **74**, 130-131 (2006).
- [6] P. Gong y C. Van Leeuwen, *Europhys. Lett.*, **67** (2), 328-333 (2004).
- [7] Yaneer Bar-Yam, “*Dynamics of Complex Systems*”, Addison-Wesley (1997).
- [8] <http://en.wikipedia.org/wiki/Evolution>.
- [9] <http://en.wikipedia.org/wiki/Co-evolution>.
- [10] <http://en.wikipedia.org/wiki/Adaptation>.
- [11] S. Milgram, *Psycho. To.* 1(May): 61-67 (1962).
- [12] D.J. Watts and S.H. Strogatz, *Nature* (London) **393**, 440 (1998).
- [13] Mark Newman, Albert Barabási y Duncan Watts, *The Structure and Dynamics of Network* (Princeton University Press, U.S.A., 2006).
- [14] Nino Boccaro, *Modeling Complex Systems*, Springer-Verlag (2004).
- [15] B. Bollobás, *Random Graph*, Academic Press London (1985).

-
- [16] Adamic, L. A., “The Small World Web”, Lecture Notes in Computer Science (1999).
- [17] S. H. Yook, H. Jeong y A. L. Barabási, cond-mat/0107417.
- [18] M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E* **64**, 016131 (2001a). *Phys. Rev. E* **64**, 016132 (2001b). *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **98**, 404-409 (2001c).
- [19] R. Albert y A.-L- Barabási, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [20] A. Wagner y D. A. Fell, “The small world inside large metabolic networks”, Technical Report 00-07-041, Santa Fe Institut, 2000.
- [21] J. M. Montoya y R. V. Solé, *J. Theor. Biol.* **214**, 405-412 (2002).
- [22] R. Ferrer-i-Cancho y R. V. Solé, *J. of Quan. Lings.* **8**(3), 165-173 (2001).
- [23] S. H. Yook, H. Jeong y A-L Barabási, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5835-5838 (2001).
- [24] Gilberto Corso, *Phys. Rev. E.* **69**, 036106 (2004).
- [25] F. Lijeros, C. Edling, L. Amaral, H. Stanley, Y Aberg, *Nature* **411**, 907 (2001).
- [26] The Erdős number proyect: <http://www.oakland.edu/enp/>.
- [27] The oracle of baseball: <http://www.baseballreference.com/oracle/>
- [28] Steven H. Strogatz, “*Nonlinear Dynamics and Chaos*”, Perseus Books Publishing (1994).
- [29] Javier González Estévez “*Comportamiento colectivo no trivial de mapas logarímicos acoplados globalmente*”, Tesis de Pregrado, Universidad de Los Andes, (1997).
- [30] M. G. Cosenza y J. González, *Prog. of Theor. Phys.* **100**, 21 (1998).
- [31] O. Alvarez-Llamoza, M. G. Cosenza y G. A. Ponce, *Chaos, Solitons & Fractals* **36**, 150 (2008).
- [32] K. Kaneko, Ph. D. Thesis, University of Tokyo, “*Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems* (1983).
- [33] K. Kaneko, *Prog. Theor. Phys.* **72**, 480 (1984).
- [34] K. Kaneko, *Physica D* **41**, 137-172 (1990).
-

-
- [35] K. Kaneko y I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond*, Springer (2000).
- [36] José Luis Herrera “*Modelo dinámico de la influencia del entorno en redes sociales de pequeño mundo*”, Tesis de Pregrado, Universidad de Los Andes, (2005).
- [37] Luz Marina Reyes, “*Elementos móviles con interacciones asimétricas: un modelo de comportamiento social de especies biológicas*”, Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes (2006)
- [38] A. Pikovsky, M. Rosenblum y J. Kurths, “**Synchronization**: *a universal concept in nonlinear sciences*”, Cambridge University Press (2001).
- [39] M. Pineda y M. G. Cosenza, *Phys. Rev. E* **71**, 057201 (2005).
- [40] K. Kaneko y I. Tsuda, *Chaos* **13**, 926-936 (2003).
- [41] C. Castellano, S. Fortunato y V. Loreto, “Statistical physics of social dynamics”, *Rev. of Mod. Phys.* in preparation.